***Давлатов Ш.О. Доцент.***

***Университет экономики и педагогики***

***Узбекистан, г.Карши***

## *ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ Т-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ.*

*Аннотация. В этом статье рассмотрен метод конечных элементов для симметрических t-гиперболических систем. Построена неявная разностная схема смешанной задачи для симметрических t-гиперболических систем. Создан алгоритм численного решения смешанной задачи для симметрических t-гиперболических систем методом конечных элементов на нерегулярной сетке. На основе этого алгоритма создана программа для численного решения смешанной задачи для симметрических t-гиперболических систем методом конечных элементов на нерегулярной сетке. Приведен численный расчет модельной задачи.*

***Ключевые слова****: метод конечных элементов, гиперболическая система, базисные функции, неявно-разностная схема.*

***Davlatov Sh.O.***

***University of Economic and Pedagogy***

***Uzbekistan, Karshi***

## *NUMERICAL SOLUTION OF SYMMETRIC T-HYPERBOLIC SYSTEMS ON AN IRREGULAR GRID.*

*Abstract. This article discusses the finite element method for symmetric t-hyperbolic systems. An implicit difference scheme of a mixed problem for symmetric t-hyperbolic systems was constructed. Created an algorithm for a numerical solution of a mixed problem for symmetric t-hyperbolic systems by finite elements on an irregular grid. Based on this algorithm, a program has been created for a numerical solution of a mixed problem for symmetric t-hyperbolic systems by the method of finite elements on an irregular grid. The numerical calculation of the model problem is given.*

**Keywords:** finite element method, hyperbolic system, basic functions, implicit difference scheme.

## 1. Введение

Постановка смешанной задачи: Пусть $\Omega = \left\{(x,y): x \in \left(0, l_x\right), y \in \left(0, l_y\right)\right\}$.
В области $G := \left\{\left(t,x,y\right): t \in \left(0,T\right),\ (x,y) \in \Omega\right\}$ найти вектор- функцию $u$ удовлетворяющей системе

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} + A\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + B\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} + Cu(x,y,t) = F(x,y,t) \tag{1}$$

с граничным

$$(D-N)u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2}$$

и начальным

$$u\left(0,x,y\right) = u_0\left(x,y\right); \tag{3}$$

условиями.

Здесь $A, B$ симметрические, постоянные матрицы размерностью $M \times M$, $B$ постоянная матрица размерностью $M \times M$,
$\boldsymbol{u(t,x,y) = (u_1(t,x,y), u_2(t,x,y), \ldots, u_M(t,x,y))^T}$
неизвестная вектор функция,
$F(t,x,y) = (f_1(t,x,y), f_2(t,x,y), \ldots, f_M(t,x,y))^T$,
$f_i(t,x,y) \in C(\Omega_T),\ i = \overline{1,M}$,
$\boldsymbol{u_0(x,y) = (u_{01}(x,y), u_{02}(x,y), \ldots, u_{0M}(x,y))^T}$ заданная вектор функция $u_{0i}(x,y) \in C(\Omega),\ i = \overline{1,M}$. $D = An_x + Bn_y$, $n = (n_x, n_y)$ внешний нормаль на границу области $\Omega$. $N$ матрица $M \times M$, удовлетворяющая условию $N + N^* \geq 0$.

## 2. Построение разностной схемы.

Отрезок $[0,T]$ разобъем на $N_t$ частей

$$t_n = \tau \cdot n, (n = 0, \ldots, N_t), \tau = \frac{T}{N_t}.$$

Проведем прямые $x = x_i = h_x i \quad (i = 0, \ldots, N_x, h_x = \frac{l_x}{N_x})$, $y = y_j = h_y j$ $(j = 0, \ldots, N_y, h_y = \frac{l_y}{N_y})$. Пересечение прямых $x = x_i$ и $y = y_j$, называемый узлом сетки, обозначим через $M_{ij} = M(x_i; y_j)$.

Сетка разбивает прямоугольный область $\Omega$ на части (элементы). Каждый элемент прямоугольник. Элементы, один из вершин которых, является узел $M_{ij}$ называются элементами этого узла. Объединение этих узлов обозначим через $\Omega_{ij}$.

Будем искать приближенное решение $u_h\left(t_n,x,y\right)$ на каждом слое $t_n$ по времени в виде

$$u_h^n=u_h\left(t_n,x,y\right)=\sum_{i=0}^{N_x}\sum_{j=0}^{N_y}u_{ij}(t_n)\cdot Q_{ij}(x,y), \tag{4}$$

где $Q_{ij}(x,y)$ базисные функции,

$$u_{ij}^n=u(x_i,y_j,t_n)=\left(u_{1ij}(t_n),u_{2ij}(t_n),...,u_{Mij}(t_n)\right)^T=\left(u_{1ij}^n,u_{2ij}^n,...,u_{Mij}^n\right)^T.$$

Аппроксимируем систему (1) в узле $M_{ij}$ т.е. в системе (1) производную по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$ аппроксимируем отношением $\frac{u\left(t+\tau,x,y\right)-u\left(t,x,y\right)}{\tau}$, вместо $u\left(t,x,y\right)$ подставим $u_h\left(t_n,x,y\right)$, каждое уравнение полученной системы умножим на $Q_{ij}(x,y)$ и проинтегрируем по $\Omega_{ij}$. В итоге получим неявную разностную схему:

$$\begin{gathered}\left(u_h^{n+1},Q_{ij}\right)_{\Omega_{ij}}+\tau\left(A\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x},Q_{ij}\right)_{\Omega_{ij}}+\tau\left(B\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial y},Q_{ij}\right)_{\Omega_{ij}}+\tau\left(Cu_h^{n+1},Q_{ij}\right)_{\Omega_{ij}}=\\=\tau\left(F_h^{n+1},Q_{ij}\right)_{\Omega_{ij}}+\left(u_h^n,Q_{ij}\right)_{\Omega_{ij}}\quad (x_i,y_j)\in\overline{\Omega}_h.\end{gathered} \tag{5}$$

где $\left(u,v\right)_{\Omega_{ij}}=\iint\limits_{\Omega_{ij}}u(x,y)\cdot v(x,y)d\Omega_{ij}$.

В качестве примера базисной функции берем следующие функции $Q_{ij}(x,y)=\phi_i\left(x\right)\cdot\psi_j\left(y\right)$, где

$$\varphi_i\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h_{xi}}, & x\in\left(x_{i\text{-}1},x_i\right);\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h_{xi+1}}, & x\in\left(x_i,x_{i+1}\right); \qquad i=1,...,N_x\text{ -}1\\ 0, & x\notin\left(x_{i\text{-}1},x_{i+1}\right);\end{cases}$$

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1-x}{h_{x1}}, & x\in(x_0,x_1);\\ 0, & x\notin(x_0,x_1);\end{cases}\qquad \varphi_{N_x}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{N_x-1}}{h_{xN_x}}, & x\in(x_{N_x-1},x_{N_x});\\ 0, & x\notin(x_{N_x-1},x_{N_x});\end{cases}$$

$$\psi_j(y)=\begin{cases}\dfrac{y-y_{j-1}}{h_{yj}}, & y\in(y_{j-1},y_j);\\ \dfrac{y_{j+1}-y}{h_{yj+1}}, & y\in(y_j,y_{j+1});\\ 0, & y\notin(y_{j-1},y_{j+1});\end{cases}\qquad j=1,\dots,N_y-1$$

$$\psi_0(y)=\begin{cases}\dfrac{y_1-y}{h_{y1}}, & y\in(y_0,y_1);\\ 0, & y\notin(y_0,y_1);\end{cases}\qquad \psi_{N_y}(y)=\begin{cases}\dfrac{y-y_{N_y-1}}{h_{yN_y}}, & y\in(y_{N_y-1},y_{N_y});\\ 0, & y\notin(y_{N_y-1},y_{N_y});\end{cases}$$

тогда после некоторых несложных вычислений из (5), получим следующую разностную схему системы (1) в узле $M_{ij}=M(x_i;y_j)\in\Omega_h$, $(i=1,\dots,N_x-1,\ j=1,\dots,N_y-1)$:

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\begin{array}{l}\alpha_{1ks}\cdot u_{sij}^{n+1}+\alpha_{2ks}\cdot u_{si+1j}^{n+1}+\alpha_{3ks}\cdot u_{si+1j+1}^{n+1}+\alpha_{4ks}\cdot u_{sij+1}^{n+1}+\alpha_{5ks}\cdot u_{si-1j+1}^{n+1}+\\ +\alpha_{6ks}\cdot u_{si-1j}^{n+1}+\alpha_{7ks}\cdot u_{si-1j-1}^{n+1}+\alpha_{8ks}\cdot u_{sij-1}^{n+1}+\alpha_{9ks}\cdot u_{si+1j-1}^{n+1}\end{array}\right]=f_{kij}^{n+1}+$$
$$\sum_{s=1}^{N}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\delta_{ks}}{\tau}\cdot\left(\dfrac{4}{9}u_{sij}^{n}+\dfrac{1}{9}(u_{si+1j}^{n}+u_{sij+1}^{n}+u_{si-1j}^{n}+u_{sij-1}^{n})+\dfrac{1}{36}(u_{si+1j+1}^{n}+\right.\\ \left.+u_{si-1j+1}^{n}+u_{si-1j-1}^{n}+u_{si+1j-1}^{n})\right)\end{array}\right], \tag{6}$$
$k=1,\dots,M.$

Здесь $\delta_{ks}=\begin{cases}1 & если\ k=s\\ 0 & если\ k\neq s\end{cases}$,

$$\alpha_{1ks}=\frac{4}{9}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})+\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{h_{xi}}-\frac{1}{h_{xi+1}})a_{ks}+\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{h_{yj}}-\frac{1}{h_{yj+1}})b_{ks},$$

$$\alpha_{2ks}=\frac{1}{9}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})+\frac{1}{3}\cdot\frac{a_{ks}}{h_{xi+1}}+\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{h_{yj}}-\frac{1}{h_{yj+1}})b_{ks},$$

$$\alpha_{3ks}=\frac{1}{36}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{a_{ks}}{h_{xi+1}}+\frac{b_{ks}}{h_{yj+1}}),$$

$$\alpha_{4ks}=\frac{1}{9}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{h_{xi}}-\frac{1}{h_{xi+1}})a_{ks}+\frac{1}{3}\cdot\frac{b_{ks}}{h_{yj+1}},$$

$$\alpha_{5ks}=\frac{1}{36}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})-\frac{1}{12}\cdot(\frac{a_{ks}}{h_{xi}}-\frac{b_{ks}}{h_{yj+1}}),$$

$$\alpha_{6ks}=\frac{1}{9}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})-\frac{1}{3}\cdot\frac{a_{ks}}{h_{xi}}+\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{h_{yj}}-\frac{1}{h_{yj+1}})b_{ks},$$

$$\alpha_{7ks}=\frac{1}{36}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})-\frac{1}{12}\cdot(\frac{a_{ks}}{h_{xi}}+\frac{b_{ks}}{h_{yj}}),$$

$$\alpha_{8ks}=\frac{1}{9}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{h_{xi}}-\frac{1}{h_{xi+1}})a_{ks}-\frac{1}{3}\cdot\frac{b_{ks}}{h_{y}},$$

$$\alpha_{9ks}=\frac{1}{36}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{a_{ks}}{h_{xi+1}}-\frac{b_{ks}}{h_{yj}}).$$

Для того чтобы замкнуть систему линейных алгебраических уравнений(СЛАУ) (6) воспользуемся аппроксимациями граничных и начальных условий:

$$\begin{aligned}&(D-N)u(t_{n+1},x,y_j)\big|_{x=0}=0\\&(D-N)u(t_{n+1},x,y_j)\big|_{x=l_x}=0\\&(D-N)u(t_{n+1},x_i,y)\big|_{y=0}=0\\&(D-N)u(t_{n+1},x_i,y)\big|_{y=l_y}=0\end{aligned}\qquad(7)$$

при $t=0$:

$$u\left(0,x_i,y_j\right)=u_0\left(x_i,y_j\right),\quad M(x_i,y_j)\in\overline{\Omega}_h.\qquad(8)$$

В качестве дополнительных граничных условий (неопределенных дифференциальной постановкой смешанной задачи) используется аппроксимация исходной системы. В итоге получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений. СЛАУ решим методом главных элементов.

Нерегулярная сетка создается следующим образом. Область $\Omega$ разбиваем выше указанным способом на несколько частей. Это является первоначальной “грубой” сеткой. На этой сетке находим численное решение задачи (1)-(3). После нахождения решения, если модул разности значений , хотя бы одной компоненты вектор-функции $u_h(x,t)$ , в узлах между $M_{ij}$ , $M_{i+1j}$ или в узлах между $M_{ij}$ , $M_{ij+1}$ больше заданного число $\delta > 0$ , то середину этих узлов ставим новый узел. Создаем первую нерегулярную сетку. На этой сетке повторна находим численное решение задачи (1)-(3). Аналогично выше указанным способом создаем следующую нерегулярную сетку. Этот процесс будем повторять пока не будет выпольнятся неравенства $\left|u_{ki+1j} - u_{kij}\right| \le \delta$ и $\left|u_{kij+1} - u_{kij}\right| \le \delta$ $(k = 1,...,M)$.

### 3. Численные расчеты.

В качестве примера рассмотрим задачу 1.

Пусть $\Omega = \{(x,y): 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi\}$.

Возмем $\beta = 1$ и $\varphi = \sqrt{2}\sin x \sin y \cos\sqrt{2}t$

начальные условии при $t = 0$

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = \sqrt{2}\sin x \sin y$$

условие на границе

$$(D-N)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\Big|_{\partial\Omega} = 2\begin{pmatrix} 0\,0 - n_1 \\ 0\,0 - n_2 \\ 0\,0 - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\Big|_{\partial\Omega} = 2\begin{pmatrix} -n_1 u_3 \\ -n_2 u_3 \\ -u_3 \end{pmatrix}\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

Из этого следует, что на всей стороне прямоугольника

$$u_3 = 0.$$

При $t > 0$ точное решение смешанной задачи будет

$$u_1 = \cos x \sin y \sin\sqrt{2}t, u_2 = \sin x \cos y \sin\sqrt{2}t,$$

$$u_3 = \sqrt{2}\sin x \sin y \cos\sqrt{2}t\ .$$

В таблице ниже приведены значения разницы $\|u - v\|_{L^2(\Omega)}$ на неравномерной сетке при различных разбиениях по времени $t$ и первоначальном разбиении $N_x = 3, N_y = 3$ по $x$ и по $y$ соответственно, при $\delta = 0{,}2$ и при $t = 15$.

| $N_t$ | $N_x$ | $N_y$ | $\|u - v\|_{L^2(\Omega)}$ |
|---|---|---|---|
| 10 | 13 | 13 | 0.4603349 |
| 20 | 13 | 13 | 0.2622136 |
| 40 | 13 | 13 | 0.1154079 |
| 80 | 13 | 13 | 0.0228676 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 160 | 13 | 13 | 0.0220265 |

**Литература**

1. K. O. Friedrichs, Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math.,11 (1958), pp. 333–418.
2. R.D. Aloev, Z.K. Eshkuvatov, Sh.O. Davlatov, N.M.A. NikLong.
Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric T-hyperbolic systems with constant coefficients. Computers and Mathematics with Applications. USA.68(2014 ) pp. 1194-1204. ( Scopus. IF=3.37)