ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ДВУХСКОРОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ.

Турдиев Улугбек Каюмович
Доцент кафедры математики
Университета информационных
технологий и менеджмента в.б.
Юлдошев Ғайрат Илҳом ўғли
магистрант магистр Университета
информационных технологий и менеджмента

Аннотация. Рассмотрена задача Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса возникающая в двухскоростной гидродинамике. Методом слабой аппроксимации доказано существование и единственность решения задачи Коши для одномерной системы типа Бюргерса.

Ключевые слова: Двухскоростная гидродинамика, система типа Бюргерса, метод слабой аппроксимации.

CAUCHY PROBLEM FOR SYSTEM OF ONE-DIMENSIONAL EQUATIONS ARISING IN TWO-SPEED HYDRODYNAMICS

Turdeyiev Ulugbek
Associate Professor of Mathematics
University of Information technologies and management
Yuldoshev G'ayrat
Master of the University of Information Technology and Management

Annotation. The Koshi problem for a one-dimensional system of Byurgers type equations arising in two-velocity hydrodynamics is considered. By the method of weak approximation, the existence and uniqueness of the solution of the Koshi problem for a one-dimensional Byurgers type system is proved.

Keywords: Two-velocity hydrodynamics, Byurgers type system, weak approximation method.

1 Введение

В последние десятилетия, математики становятся все более заинтересованы в проблемах, связанных с поведением решений систем уравнений в частных производных, с малым параметром при старших производных и с учетом кинетических параметров. Эти проблемы возникли из физических приложений, в основном из современной гидродинамики (сжимаемых многофазных жидкостей с малыми вязкостями). Аналогия уравнению Бюргерса возникает, например, при исследовании слабо нелинейной одномерной акустической волны, движущейся с линейной скоростью звука. В этом случае нелинейные по скоростям члены в системе уравнений типа Бюргерса происходят из зависимости скоростей звука от амплитуды звуковой волны, а члены со второй производной и разности скоростей представляют затухание звуковых волн, связанное с диссипацией энергии. Другими словами, эти члены, обеспечивают непрерывность решений и представляют диссипативные процессы, связанные с производством энтропии. Эти члены, в свою очередь, обеспечивают неопрокидывание волн [1]. Рассматриваемая система является частным случаем системы уравнений двухскоростной гидродинамики в одномерном случае [2-5].

Одномерным аналогом уравнений Навье-Стокса для сжимаемых жидкостей можно считать систему уравнений типа Бюргерса, которая представляет собой систему нелинейных уравнений конвекции-диффузии

$$u_t+uu_x=\nu u_{xx}-\tilde{b}(u-\tilde{u}), \qquad \textbf{(1)}$$

$$\tilde{u}_t+\tilde{u}\tilde{u}_x=\tilde{\nu}\tilde{u}_{xx}-\tilde{b}(u-\tilde{u}), \qquad \textbf{(2)}$$

где величины u и $\tilde{u}$ можно рассматривать, как скорости подсистем с размерностью [x]/[t], составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями $\rho\, u\, \tilde{\rho}, \bar{\rho}=\tilde{\rho}+\rho$ - общая плотность континуума, $-\tilde{b}=\frac{\tilde{\rho}}{\rho}b, b$— коэффициент трения с размерностью $1/[t]$, который является аналогом коэффициента Дарси для пористых сред. Положительные константы ν и $\tilde{\nu}$ играют роль кинематических вязкостей подсистем с размерностью $[x]^2/[t]$.

У системы уравнений двухскоростной гидродинамики и системы уравнений типа Бюргерса много общего. Например, квадратичная нелинейность по u и $\tilde{u}$ члены с адвективным слагаемым, отвечающим зависимости звука от амплитуды звуковых волн и линейных вязкостей$-\nu, \tilde{\nu}$, коэффициента трения b [1] в правых частях, отвечающие за затухание звуковых волн. Что касается свойств решений, то они совершенно разные. У системы уравнения Бюргерса при исчезающих коэффициентах $\nu, \tilde{\nu}, b$ формируются как сильные (ударные волны), так и слабые разрывы, в то время как решения системы двухскоростной гидродинамики такими особенностями не обладают. Однако область применимости этой системы отнюдь не ограничиваются приведенными примерами, такие системы возникают во многих задачах, чем и определяется ее значение.

В данной работе для доказательство существование и единственности решения задачи Коши для одномерной системы типа Бюргерса используется метод слабой аппроксимации. В —наиболее полном виде метод слабой аппроксимации для линейных уравнений исследован Г.В. Демидовым и В.А. Новиковым [6]. З.Г. Гегечкори изучал расщепление многомерных - эллиптических операторов со смешанными производными на одномерные (по различным направлениям) и сходимость таких методов для параболических задач. Первые результаты о сходимости метода слабой аппроксимации для нелинейных уравнений принадлежат Г.И. Марчуку и Г.В. Демидову, доказавшим сходимость метода расщепления для одной из задач краткосрочного прогноза погоды [8]. Ю.Я. Беловым и Г.В. Демидовым исследована сходимость МСА для различных вариантов расщепления квазилинейной системы уравнений типа Бюргерса в [9]. Г .В. Демидовым, В.Ф. Рапутой метод слабой аппроксимации изучался для абстрактных нелинейных операторных уравнений, частными случаями которых являются системы типа Коши-Ковалевской [10, 11] Ю.Я. Белов на основе МСА исследовал вопросы разрешимости и устойчивости стационарных решений распадающихся квазилинейных параболических систем уравнений первого порядка. Ю.Е. Бояринцевым доказаны достаточно общие теоремы сходимости МСА для обыкновенных дифференциальных уравнений, исследована возможность применения метода к задачам оптимального управления [12]

2. Задача Коши для системы уравнений типа Бюргерса

Рассмотрим для системы (1), (2) в полосе $\Gamma_{[0,T]}=\{(t,x):0\le t\le T, x\in R\}$ задачу Коши со следующими начальными данными

$$u\vee ¿_{t=0}=u_0(x),\tilde{u}\vee ¿_{t=0}=\tilde{u}_0(x),x\in R.(3)¿¿$$

Нас будут интересовать решения задачи Коши для системы уравнений типа Бюргерса (1), (2) в отличие, а именно $u(t,x),u(t,x)\ni C^{1,2}(\Gamma_{[0,T]})$ - класс функций один раз непрерывно дифференцируемых по t и два раза непрерывно дифференцируемых по x.

3. Метод слабой аппроксимации. Теорема сходимости метода слабой аппроксимации

Для полноты изложения приведем краткое описание метода слабой аппроксимации и одну теорему сходимости метода. Более подробно эта информация изложена в [13, 14]

В банаховом пространстве H рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du}{dt}+L(t)u=f(t),t\ni[0,T],u¿_{t=0}=u_0, \qquad (1.5)$$

где $L(t)$ - нелинейный, вообще говоря, неограниченный оператор с переменной областью определения $D(L(t))$, причем при каждом фиксированном $t\in 2[0,T]$ оператор $L(t)$ отображает $D(L(t))$ в H.

Пусть $L=\sum_{i=1}^{m}L_{i,}f=\sum_{i=1}^{m}f_i=¿i=1¿mD(L_i(t))\subseteq D(L(t))$.

Считаем, что операторы $L_i(t)$ отображают $D(L¿¿i(t))¿$ в H функции

$$fi(t)\in H,i=1,\ldots,m.$$

Наряду с задачей (1.5) рассмотрим семейство задач, зависящих от параметра τ :

$$\frac{du^\tau}{dt}+L\tau(t)u^\tau=f\tau(t),t\in[0,T],u^\tau¿_{t=0}=u_0 \qquad (1,6)$$

Где

$$L_\tau(t)=\sum_{i=1}^{m}.\alpha_i(\tau,t)L_i(t), f_\tau(t)=\sum_{i=1}^{m}.\beta_i(\tau,t)f_i(t),$$

а функции $\alpha_i(\tau,t),\beta_i(\tau,t)$ слабо аппроксимируют единицу, т.е. для любых $t_1,t_2\in[0,T]$ при $\tau\to 0$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\alpha_i(\tau,t)-1)dt\to 0, \qquad \int_{t_1}^{t_2}(\beta_i(\tau,t)-1)dt\to 0$$

Метод решения задачи (1.5), при котором в качестве приближенных решений $u^\tau,\tau>0,$ берутся решения задачи (1.6) и решение u задачи (1.5) находится как предел при $\tau\to 0$, решений $u^\tau(u=\lim ¿_{\tau\to 0}u^\tau),¿$ называется методом слабой аппроксимации ([13], [15], [14]).

Если функции $\alpha_i(\tau,t),\beta_i(\tau,t)$ выбрать в виде $n=0,1,\ldots\ldots,N-1,$ то в этом случае нахождение решения u^T задачи (1.6) сводится к решению последовательности задач Коши:

$$u^\tau ¿_{t=0}¿u_0$$

В качестве начальных данных на этом шаге берется значение решения, полученного на первом дробном шаге в момент $t=\frac{\tau}{m}$. Продолжая аналогичным образом, определяют решение на множествах $\left(\left(\frac{2\tau}{m},\frac{3\tau}{m}\right],\ldots,(m-1¿\tau¿¿m,\tau]\right)$ Тем самым находят решение на отрезке $[0,\tau]$ - нулевом целом шаге. После этого аналогично находят решение на отрезке $[\tau,2\tau]$ - первом целом шаге, затем - на отрезке $[2\tau,3\tau]$ и так далее. Через конечное число шагов (число это равно ~~N)~~ решение u^τ находят на отрезке $[0,T]$. Задачу (1.6) называют расщеплением задачи (1.5).

Рассмотрим в полосе $\widetilde{\Gamma}_{[0,T]}=\{(t,x)\vee 0<t<T,x\in R^n$ систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi(t,x,\bar{u}), \qquad (1,7)$$

где $u=u(t,x)=(u¿¿1(t,x)\ldots,u_1(t,x)),\varphi(\varphi_1,\ldots,\varphi_1)¿$- вектор- функции размерности l $(l\geq 0)$.

$$\bar{u}=\left(u_1,\ldots\ldots,u_l,\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\frac{\partial u_1}{\partial x_2},\ldots.\frac{\partial u_1}{\partial x_n},\ldots.\frac{\partial^r u_1}{\partial x_1^r},\ldots..,\frac{\partial^r u_n}{\partial x_n^r}\right).$$

Пусть $\varphi=\sum_{i=1}^{m}\varphi^i,\varphi_j=\sum_{i=1}^{m}\varphi_j^i, j=1,\ldots.l,$ где φ^i - вектор-функции размерности $l;\varphi^i,\varphi_j^i-j$ -е компоненты векторов φ и φ^i–соответственно. Система

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t}=\sum_{i=1}^{m}a_{i,\tau}(t)\varphi_i(t,x,\bar{u}^\tau), \tag{1.8}$$

где

$n=0,1,\ldots,N-1;\tau N=T$ слабо аппроксимирует систему (4). $\varphi_i(t,x,\bar{u}^\tau)$ - некоторые аппрокси-мации вектор-функций $\varphi_i(t,x,\bar{u}^\tau)$ зависящие от τ.

Наконец, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t}\sum_{i=1}^{m}a_{i,\tau}(t)\varphi_{i,\tau}(t,x,\bar{u}^\tau) \tag{1.9}$$

где вектор-функции $\varphi_{i,\tau}¿$–есть некоторые аппроксимации вектор-функций $\varphi_i¿$ зависящие от τ.

Ниже будем рассматривать классические решения уравнений (1.7), (1.8), (1.9). Под классическими решениями уравнений (1.8) ((1.9)) мы понимаем функцию u^τ непрерывную вместе со всеми своими производными по пространственным переменным, которые входят в уравнение (1.8), в полосе $\tilde{\Gamma}_{[0,T]}$, обладающую кусочно-непрерывной производной u_t^τ В $\tilde{\Gamma}_{[0,T]}$, $(u¿¿t^\tau)¿$может иметь разрывы лишь на гиперплоскостях

$t=\left(n+\frac{i}{m}\right)\tau,n=0,1,\ldots\ldots.,N-1,\tau N=T,i=0,1,\ldots.,m-1¿$и удовлетворяющую уравнению (1.8) ((1.9)).

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1. Вектор-функции φ_iопределены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Вектор-функции $\varphi_{i,\tau}¿$ на классических решениях $\bar{u}^\tau$ системы уравнений (1.9) непрерывны по переменным $(t,x)\in\tilde{\Gamma}_{[0,T]}$

Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}(0<\tau\le\tau_0)$ - некоторая последовательность, сходящаяся к нулю: $\lim ¿_{k\to\infty}\tau_k=0¿$. Заметим, что последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствует последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}=1$ целых чисел, таких, что $\tau_k N_k=T$. Через $u^{\tau_k}(t,x)$

обозначим решение системы (1.9) при фиксированном $\tau_k > 0$.

Условие 2. Пусть при всех $\tau_k > 0$ классическое решение u_k^τ системы (1.9) существует и при $\tau_k \to 0$ равномерно в $\widetilde{\Gamma}_{[0,T]}^N = (t,x) \vee 0 < t < T, |x| \le N\}$ последовательность u_k^τ сходится к некоторой вектор-функции u вместе со всеми производными по x, входящим в (1.7), причем

$$\max_{\widetilde{\Gamma}_{[0,T]}^N} ¿ \left| \varphi_i(t,x,\bar{u}^{\tau k}) - \varphi_{i,\tau_k}(t,x,\bar{u}^{\tau k}) \right| \to 0, \tau_k \to 0, i=1,\dots,m.$$

Теорема. Пусть выполняются условия 1, 2. Тогда вектор-функция $u(t,x)$ есть решение системы (1.7) в $\widetilde{\Gamma}_{[0,T]}^N$.

Доказательство теоремы 1.3 приведено в [10].

4. Метод слабой аппроксимации для задачи Коши для системы уравнений типа Бюргерса

Рассмотрим относительно данных Коши $u_0, \!\!-\!\! \tilde{u}_0$ задачи (1)-(3) предположим, что $u_0, \tilde{u}_0 \in C^2(R)$ и

$$\left| \frac{d^n u_{0(x)}}{dx^n} \right| \le c_n, \left| \frac{d^n \tilde{u}_0(x)}{dx^n} \right| \le \tilde{c}_n \, x \in R, n=0,1,2,\dots\dots, \tag{2.0}$$

где $c_n, \tilde{c}_n$ - некоторые заданные неотрицательные постоянные.

В начале рассмотрим случай бесконечно дифференцируемых данных Коши. Предположим, что $u_0, \tilde{u}_0 \in C^\infty(R)$и

$$\left| \frac{d^n u_0(x)}{dx^n} \right| \le c_{n,} \left| \frac{d^n \tilde{u}_0(x)}{dx^n} \right| \le \tilde{c}_n \, x \in R, n=0,1,\dots, \tag{2.1}$$

Следуя [9, 16], слабо аппроксимируем задачу Коши (1)-(3) задачей

$$u_t^\tau = 3\nu u_{xx}^\tau, \tilde{u}_t^\tau = 3\tilde{\nu} \tilde{u}_{xx}^\tau, n\tau < t \le \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau, \tag{2.2}$$

$$u_t^\tau + 3u^\tau u_x^\tau = 0, \tilde{u}_t^\tau + 3\tilde{u}^\tau \tilde{u}_x^\tau = 0, \left(n+\frac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(n+\frac{2}{3}\right)\tau, \tag{2.3}$$

$$u_t^\tau = -3\tilde{b}(u^\tau - \tilde{u}^\tau), \tilde{u}_t^\tau = 3b(u^\tau - \tilde{u}^\tau), \left(n+\frac{2}{3}\right)\tau < t \le (n+1)\tau, \tag{2.4}$$

$$u^\tau(0,x) = u_0(x), \tilde{u}^\tau(x,0) = \tilde{u}_0(x), \tag{2.5}$$

где $N_\tau = t^{¿}, N > 1$ - целое, $n=0,1,\dots,N-1$, и постоянная $t^{¿}$ удовлетворяет неравенству (30) (см. ниже).

Замечание При построении решения задачи (2.2)-(2.5) на первых дробных шагах решается задача Коши для уравнения теплопроводности, а на вторых дробных шагах - задача Коши для уравнения переноса

$$v_t + 3 v v_x = 0, \quad (2.6)$$

а на третьих дробных шагах - задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнении. Решения которого имеет вид

$$u_t^{\tau} = u_0(x) + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}}\left(\tilde{u}_0(x) - u_0(x)\right)\left(1 - e^{-\bar{b}t}\right),$$

$$\tilde{u}^{\tau} = \tilde{u}_0(x) e^{-\bar{b}t} + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}}\tilde{u}_0(x)\left(1 - e^{-\bar{b}t}\right) + \frac{3b}{\bar{b}} u_0(x)\left(1 - e^{-\bar{b}t}\right)$$

где $\bar{b} = 3(b + \tilde{b})$.

Известно, что в случае задачи Коши для уравнения (2.6) с начальными данными

$$v(0, x) = v_0(x) \quad (2.7)$$

ограниченными вместе со своими производными, может иметь место градиентная катастрофа то есть может существовать $t_l > 0$, такое, что классическое решение vэтой задачи существует в полосе $\Gamma_{[0,t¿¿l]¿}$, само остается в этой полосе ограниченным, но производная v_x в окрестности некоторой точки ¿¿) становится неограниченной: $v_x(t,x) \to \infty$, при $t \to t_l, x \to x^0$[1, 11, 13].

Нетрудно показать, что если

$$\left|\frac{dv_0(x)}{dx}\right| \le c_1 \quad (2.8)$$

то классическое решение задачи (2.6), (2.7) существует в полосе $\Gamma_{[0,t¿¿¿]¿}$, ограничено и

$$\left|v_x(t,x)\right| \le \frac{c_1}{1 - c_l t}, (t,x) \in \Gamma_{[0,t^{¿}]}, \quad (2.9)$$

где t удовлетворяет неравенству

$$1 - 3 c_l t^{¿} > 0$$

Пусть выполнены соотношения (2.1) и постоянные c, a и $t^{¿}$ удовлетворяют условиям

$$1 - c_l t^{¿} > 0, 1 - \tilde{c}_l t^{¿} > 0 \quad (3.0)$$

тогда решение u^τи $\tilde{u}^\tau$в полосе $\Gamma_{[0,t^{¿}]}$, существует и ограничено вместе со всеми своими производными по переменным t,x .

Очевидно, что при любом фиксированном г решение u^τи $\tilde{u}^\tau$ задачи (2.2)-(2.5) ограничены независимо от величины τ:

$$\left|u^\tau(t,x)\right|\le c_0,\left|\tilde{u}_\tau(t,x)\right|\le\tilde{c}_0 \qquad (3.1)$$

Повторяя рассуждение из [9], можно показать ограниченность частных производных решений u^τи $\tilde{u}^\tau$ по x любого порядка равномерно по τ:

$$\left|\frac{\partial^k u^\tau(t,x)}{\partial x^k}\right|\le C_k,\left|\frac{\partial^k \tilde{u}^\tau(t,x)}{\partial x^k}\right|\le\tilde{C}_k,(t,x)\in\Gamma_{[0,t^{¿}]},k=0,1,\ldots, \qquad (3.2)$$

- где $C^k,\tilde{C}^k$—— некоторые положительные постоянные, такие что $C_0=c_0,\tilde{C}_0=\tilde{c}_0$

Из неравенств (3.1), (3.2) и уравнений (2.2)-(2.4) следуют равномерные по τ оценки:

$$\left|\frac{\partial^{k+1} u^\tau(t,x)}{\partial t\,\partial x^k}\right|\le C_k,\left|\frac{\partial^{k+1} \tilde{u}^\tau(t,x)}{\partial t\,\partial x^k}\right|\le\tilde{C}_k,(t,x)\in\Gamma_{[0,t^{¿}]},k=0,1,\ldots, \qquad (3.3)$$

Из этих оценок следует, что u^τ, $\tilde{u}^\tau$ и их производные по x любого порядка равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в $\Gamma_{[0,t^{¿}]}$. На основании теоремы Арцела диагональным способом можно выбрать под последовательность $\{u^{\tau_k}\},\{\tilde{u}^{\tau_k}\}$ последовательностей $\{u^\tau\},\{\tilde{u}^\tau\}$, сходящуюся в $\Gamma_{[0,t^{¿}]}$ к функциям u и $\tilde{u}$ соответственно вместе со всеми производными по x, равномерно в каждой ограниченной области полосы $\Gamma_{[0,t^{¿}]}$, вследсвие чего функции u и $\tilde{u}$имеют производные любого порядка по x и выполняются соотношения

$$u(0,x)=u_0(x),\tilde{u}(0,x)=\tilde{u}_0(x), \qquad (3.4)$$

$$\left|\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial x^k}\right|\le C_k,\left|\frac{\partial^k \tilde{u}(t,x)}{\partial x^k}\right|\le\tilde{C}_k,(t,x)\in\Gamma_{[0,t]},k=0,1,\ldots, \qquad (3.5)$$

Единственность решения доказывается стандартным способом. Следовательно, и сами последовательности функций $\{u^\tau\},\{\tilde{u}^\tau\}$ при $t\to 0$ сходятся равномерно в $\Gamma_{[0,t]}$ к, u и $\tilde{u}$ соответственно, вместе со всеми производными. Случай, когда $u_0,\tilde{u}_0\in C^2(R)$ доказывается с помощью средних функций [13].

Заключения

Система типа Бюргерса является упрощением система уравнений модели двухжидкостной среды и отличается от системы уравнений модели двухжидкостной среды отсутствием давления и условиями несжимаемости. По этой причине семейство задач для системы типа Бюргерса иногда называется двухскоростной гидродинамикой без давления. Рассмотрена задача Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса, возникающей в двухскоростной гидродинамике. Методом слабой аппроксимации доказано существование и единственность решения задачи Коши для одномерной системы типа Бюргерса. Рассмотрено решение системы уравнений типа Римана в виде бегущих волн. Получена формула для ее решения в виде системы нелинейных уравнений. Численно решена периодическая задача для системы типа Бюргерса. Проведены численные эксперименты.

Список литературы:

1. Куликовский А.Г., Свешников Е.И., Чугайнова А.П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнении, Москва -2010, 122с.
2. Доровский В.Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. No.7. С.39-45.
3. Демидов Г.В., Новиков В.А. О сходимости метода слабой аппроксимации в рефлексивном банаховом пространстве // Функциональный анализ и его приложения, 1975, т. 9, No. 1, с.25-30.
4. Гегечкори З.Г., Демидов Г.В. О сходимости метода слабой аппроксимации // ДАН Россия, 1973, т. 213, No. 2, с. 264-266.
5. Турдиев У. К., Кодиров Ф. Э. Задача Коши Для Одномерной Системы Уравнений Типа Бюргерса Возникающей В Двухскоростной Гидродинамике //Инновации в технологиях и образовании: сб. ст. участников XI Между. – 2018. – С. 349.

6. Turdiyev U., Imomnazarov K. A system of equations of the two-velocity hydrodynamics without pressure //AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing, 2021. – Т. 2365. – №. 1.
7. Турдиев У. К. Система уравнений типа Римана, возникающая в двухжидкостной среде: Система уравнений типа Римана, возникающая в двухжидкостной среде //MODERN PROBLEMS AND PROSPECTS OF APPLIED MATHEMATICS. – 2024. – Т. 1. – №. 01.
8. Turdiev U. K., Kh I. K. Riemann-type system of equations arising in a two-fluid medium //Abstr. Int. Conf. Inverse and Ill-Posed Problems (Oct. 2–4, 2019, Samarkand, Uzbekistan). – 2019. – С. 119-120.
9. Turdiev U. K. Imomnazarov Kh. Kh. A system of equations of the Riemann type arising in a two-fluid medium //Int. Conf.“Inverse and ill-posed problems. – 2019. – С. 119-120.
10. Имомназаров Х., Турдиев У. К. Исследование задачи Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса методом слабой аппроксимации //Проблемы информатики. – 2019. – №. 3 (44). – С. 20-30.
11. Джумаев, Нусрат Амонович, and Улугбек Каюмович Турдиев. "Методы повышения практической деятельности учащихся при выполнении лабораторных работ по физике." *International Journal Of European Research Output* 2.2 (2023): 16-27.
12. Турдиев У. РЕШЕНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ //International Scientific and Practical Conference on Algorithms and Current Problems of Programming. – 2023. – Т. 1. – №. 01..
13. Imomnazarov B. K., Turdiev U., Erkinova D. Weak approximation method for the Cauchy problem for a one-dimensional system of Hopf-type equations //Mathematical notes of NEFU. – 2022. – Т. 29. – №. 4. – С. 11-20.
14. Имомназаров Б. Х., Турдиев У. К., Имомназаров Х. Х. Задача Коши для одномерной системы типа Бюргерса //Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. – 2019. – С. 30-30.

15. Имомназаров Б. Х., Турдиев У. К., Коробов П. В. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЮРГЕРСА //Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем. – 2019. – С. 9-14.
16. Имомназаров Х. Х., Турдиев У. К. Об одной системе уравнений типа Бюргерса, возникающей в двухжидкостной среде //Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2018. – Т. 2. – №. 4. – С. 95-103.
17. Турдиев У. К., Коробов П. В. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЮРГЕРСА1 //Математическое и компьютерное моделирование естест-венно-научных и социальных проблем: материалы XIII Меж. – С. 9.
18. Имомназаров Х. Х., Турдиев У. К. ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ПОРОУПРУГОСТИ //МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА имени МИРЗО УЛУГБЕКА. – 2012. – Т. 204. – С. 48.
19. Турдиев У. К., Имомназаров Х. Х. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТИПА ХОПФА //КАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ. – 1989. – №. 9. – С. 187.
20. Турдиев У. К., Имомназаров Х. Х. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕРЕСНЫЕ КЛАССЫ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВОЗНИКАЮЩИХ В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ //КАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ. – С. 184.