УДК 517.95

Дурдымырадов А.Ш., студент магистратуры

2 курс, факультет «Математики, физики и информационных технологий»

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

Россия, г. Элиста

Инджиева Н.Ю., студент магистратуры

2 курс, факультет «Математики, физики и информационных технологий»

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

Россия, г. Элиста

Манжеева Е.С., студент магистратуры

2 курс, факультет «Математики, физики и информационных технологий»

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

Россия, г. Элиста

Мирзаева А.М., студент магистратуры

2 курс, факультет «Математики, физики и информационных технологий»

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

Россия, г. Элиста

Убушаев Ц.Э., студент магистратуры

2 курс, факультет «Математики, физики и информационных технологий»

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

Россия, г. Элиста

Научный руководитель: Бисенгалиев Р.А.

Кандидат физико-математических наук, доцент

Durdymyradov A.S., student of a magistracy

2 course, faculty of Mathematics, Physics and Information Technology

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov

Russia, city Elista

Indzhieva N.Y., student of a magistracy

2 course, faculty of Mathematics, Physics and Information Technology

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov

Russia, city Elista

Manzheeva E.S., student of a magistracy

2 course, faculty of Mathematics, Physics and Information Technology

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov

Russia, city Elista

Mirzaeva A.M., student of a magistracy

2 course, faculty of Mathematics, Physics and Information Technology

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov

Russia, city Elista

Ubushayev T.E., student of a magistracy

2 course, faculty of Mathematics, Physics and Information Technology

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov

Russia, city Elista

Scientific director: Bisengaliev R.A.

Candidate of Physics and Mathematics sciences, associate professor

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A BIHARMONIC EQUATION

Аннотация: Пространства Соболева с отрицательными индексами реализуются как сопряженные пространства к пространствам Соболева и в некоторых случаях оказываются полезными при рассмотрении краевых задач.

Ключевые слова: краевая задача, бигармоническое уравнение, пространства Соболева, обобщенные функции.

Abstract: Sobolev Spaces with negative indexes are realized as conjugate spaces to Sobolev spaces and in some cases are useful when considering boundary value problems.

Key words: boundary value problem, biharmonic equation, Sobolev spaces, generalized functions.

Определение. Множество линейных непрерывных функционалов над пространством основных функций $\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$ обозначим $W_2^{-2}(\Omega)$ и назовем пространством Соболева с отрицательным индексом 2 или с негативной нормой.

Элементы пространства будем называть обобщенными функциями порядка 2 над пространством $\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$.

ПРИМЕР. Пусть задана функция $g(x) \in L_2$. Определим для нее оператор Лапласа Δg как обобщенную функцию порядка 2, которая действует на основные функции по правилу

$$(\Delta g, \varphi) = (g, \Delta\varphi) = \int_{\Omega} g(x) \cdot \Delta\varphi(x)\, dx, \ \ \varphi \in \overset{0}{W}{}_2^2$$

Проверим, что в данной формуле задан линейный непрерывный функционал над пространством $\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$. Его линейность очевидна, поэтому проверим непрерывность, которая есть следствие ограниченности. Из представления нормы в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$ следует, что $\Delta\varphi \in L_2$ для каждой функции $\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$ причем, $\| \Delta\varphi \| = \| \varphi \|_2$. Теперь нетрудно получить оценку обобщенной функции Δg, $g(x) \in L_2$:

$$| (\Delta g, \varphi) | = | (g, \Delta\varphi) | \le \| g \| \cdot \| \Delta\varphi \| \le \| g \| \cdot \| \varphi \|_2$$

Отсюда и следует, что функция Δg является линейным ограниченным функционалом над $\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$.

Рассмотрим краевую задачу:

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \ x \in \Omega$$
$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$$

где n — внешняя нормаль к области Ω . Будем искать решения $u \in \overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$, так что $\Delta u \in L_2$. Из представления $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ и примера рассмотренного выше следует, что $\Delta^2 u \in W_2^{-2}$. Поэтому считаем, что задана функция $f \in W_2^{-2}$, и представим задачу в виде

$$(\Delta u, \Delta\varphi) = (f, \varphi)$$
$$[u, \varphi] = (f, \varphi), \ \ \varphi \in \overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$$

Теперь можно применить знакомые аргументы. Именно, функционал (f,φ) по теореме Рисса можно представить и притом единственным образом в форме скалярного произведения в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$:

$$(f,\varphi)=[u_f,\varphi]$$

Сравнение формул показывает, что найденный элемент u_f является решением бигармонического уравнения, и притом единственным. Мы пришли к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА. Пусть дана функция $f\in W_2^{-2}$. Тогда существует и притом единственная функция $u\in\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению $\Delta^2u(x)=f(x)$, которое рассматривается как равенство элементов пространства Соболева W_2^{-2} с негативной нормой

Использованные источники:

1. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. - 416 с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Учебник для физич. и механико-математ. спец. вузов. — 4-е изд., испр. и доп. — М.: Наука, 1981. — 512 с.: ил.
3. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Обобщенные функции, выпуск 1. — М.: Гос. изд-во физико-мат. лит-ры, 1959. — 470 с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. — М.: Физматлит, 2004. — 572 с.