ЗАДАЧА ОБ ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛУМАРКОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Дильмурадов Н. (Каршинский университет информационных технологий и менеджмента)

Аннотация. В статье рассматривается дискретная система управления с полумарковскими коэффициентами. При этом решение может иметь скачок. Вектор управления ищется из условия минимума квадратичного функционала.

Ключевые слова: разностные уравнения, полумарковские коэффициенты, дискретная система управления.

THE PROBLEM OF OPTIMIZING SOLUTIONS OF A DIFFERENCE EQUATION SYSTEM WITH SEMI-MARKOV COEFFICIENTS

Dilmuradov N. (Karshi University of Information Technologies and Management)

Summary. In the article a discrete control system with semi-Markov coefficients is considered. At the same time, the solution may have a jump. The control vector is sought from the condition of the minimum of the quadratic functional.

Keywords: difference equations, semi-Markov coefficients, discrete control system.

Рассматривается дискретная система управления ($\dim X_k = m$)

$$X_{k+1} = A(k,\zeta_k)X_k + B(k,\zeta_k)U_k \quad (k=0,1,2,\dots), \tag{1}$$

где ζ_k-полумарковская цепь, принимающая значения $\theta_1,\dots,\theta_n$ и определённая интенсивностями $q_{ls}(k) \quad (l,s=1,\dots,n;\,k=1,2,\dots)$ перехода из состояния θ_s в состояние θ_l .

Ищется вектор управления U_k из условия минимума квадратичного функционала

$$v=\sum_{k=0}^{\infty}\left\langle X_k^*Q(k,\zeta_k)X_k+U_k^*L(k,\zeta_k)U_k\right\rangle, \tag{2}$$

где $Q(k,\zeta_k),\ L(k,\zeta_k)-$ симметрические, положительно определённые матрицы, а верхний индекс $*$ означает транспонирование. Предполагаем, что при $k_j\le k<k_{j+1},\ \zeta_k=\theta_s$ матричные коэффициенты в формулах (2), (3) определяются выражениями

$$\begin{gathered}A(k,\zeta_k)=A_s\left(k-k_j\right);\ B(k,\zeta_k)=B_s\left(k-k_j\right);\\ Q(k,\zeta_k)=Q_s\left(k-k_j\right);\ L(k,\zeta_k)=L_s\left(k-k_j\right)\ (s=1,\ldots,n),\end{gathered} \tag{3}$$

где $A_s(k),\ B_s(k),\ Q_s(k),\ L_s(k),\ (s=1,\ldots,n)-$ наперёд заданные детерминированные матрицы, зависящие от дискретного времени $k=0,1,2,\ldots$.

Предполагаем, что оптимальное управление имеет вид

$$U_k=S(k,\zeta_k)X_k\ \ (k=0,1,2,\ldots), \tag{4}$$

где $S(k,\zeta_k)$ матрица с полумарковскими коэффициентами. Предполагаем далее, что при $k_j\le k<k_{j+1}$ будут справедливы равенства

$$S(k,\zeta_k)=S_s\left(k-k_j\right)\ \ (s=1,\ldots,n). \tag{5}$$

Введём обозначения

$$H(k,\zeta_k)=A(k,\zeta_k)+B(k,\zeta_k)S(k,\zeta_k); \tag{6}$$

$$G(k,\zeta_k)=Q(k,\zeta_k)+S(k,\zeta_k)L(k,\zeta_k)S(k,\zeta_k). \tag{7}$$

При этом приходим к системе линейных разностных уравнений

$$X_{k+1}=H(k,\zeta_k)X_k\ \ (k=0,1,2,\ldots), \tag{8}$$

для которой ищется квадратичный функционал

$$v=\sum_{k=0}^{\infty}\left\langle X_kG(k,\zeta_k)X_k\right\rangle. \tag{9}$$

Введём основные стохастические функции Ляпунова

$$v_s(X)\equiv X^*C_sX=\sum_{k=0}^{\infty}\left\langle X_k^*G(k,\zeta_k)X_k\,\middle|\,X_0=X,\ \zeta_0=\theta_s\right\rangle\ (s=1,\ldots,n). \tag{10}$$

Если функции $v_s(X)$ $(s=1,\dots,n)$ известны, то величину функционала v (3.41) можно найти из формулы

$$v=\int\limits_{R^m}\sum_{s=1}^{n}v_s(X)f_s(0,X)dX=\int\limits_{R^m}\sum_{s=1}^{n}X^*C_sX\,f_s(0,X)dX=\sum_{s=1}^{n}C_s\circ D_s(0). \qquad (11)$$

где используются матрицы частных моментов второго порядка

$$D_s(k)=\int\limits_{R^m}XX^*f_s(k,X)dX;\quad dX=dx_1,\dots,dx_n, \qquad (12)$$

а $f_s(k,X)$ частная плотность распределения $(X_k,\zeta_k=\theta_s)$. Рассмотрим систему линейных разностных уравнений (8). Будем предполагать, что решение системы (8) умножается дополнительно на постоянные матрицы C_{sl}, $\det C_{sl}\neq 0$ $(s,l=1,\dots,n)$ в момент k_j, когда случайный процесс ζ_k имеет скачок и $\zeta_{k_{j-1}}=\theta_l,\ \zeta_{k_j}=\theta_s$.

Пусть системы линейных разностных уравнений

$$X_{k+1}^{(s)}=H_s(k)X_k^{(s)}\quad(s=1,\dots,n;\quad k=0,1,2,\dots) \qquad (13)$$

имеют фундаментальные матрицы решений $N_s(k)$

$$X_k^{(s)}=N_s(k)X_0^{(s)}\quad(k=0,1,2,\dots). \qquad (14)$$

Будем предполагать, что при выполнении условий

$$\zeta_k=\theta_l,\ k_{j-1}\le k<k_j;\quad \zeta_k=\theta_s,\ k_j\le k<k_{j-1}$$

будут справедливы соотношения $(k_{j-1}\le k<k_j)$

$$X_k=N_l(k-k_{j-1})X_{k_{j-1}};\ X_{k_j}=C_{sl}N_l(k-k_{j-1})X_{k_{j-1}},\det C_{sl}\neq 0;\ X_k=N_s(k-k_j)X_{k_j} \qquad (15)$$

т.е. в момент k_j скачка полумарковской цепи ζ_k решение системы (8) умножается слева дополнительно на необратимую матрицу C_{sl}. Из формул (11) находим систему уравнений

$$v_s(X) \equiv X^* C_s X = \sum_{k=0}^{\infty} X^* N_s^*(k)\left(\psi_s(k) G_s(k) + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) C_{ls}^* C_l C_{ls} N_s(k)\right) X,$$

$$q_{ls}(0) = 0, \quad \psi_s(t) = \int_t^{\infty} \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(\tau) d\tau \, (s = 1,\dots,n) \tag{16}$$

Полагая

$$G_s(k) = Q_s(k) + S_s^*(k) L_s(k) S_s(k); \; U_k^{(s)} = S_s(K) X_k^{(s)} \; (s = 1,\dots,n) \tag{17}$$

перепишем формулы (16) в виде

$$v_s(X) \equiv X^* C_s X = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(X_k^{(s)}\right)^*\left(\psi_s(k) Q_s(k) + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) C_{ls}^* C_l C_{ls}\right) X_k^{(s)} + \right.$$

$$\left. + \left(U_k^{(s)}\right)^* \psi_s(k) L_s(k) U_k^{(s)}\right]. \tag{18}$$

Минимизация функционала v (11) сводится к минимизации функций $v_s(X)\,(s = 1,\dots,n).$ Таким образом, задача отыскания оптимального управления (5) распадается на n задач оптимизации детерминированных систем управления

$$X_{k+1}^{(s)} = A_s(k) X_k^{(s)} + B_s(k) U_k^{(s)} \qquad (s = 1,\dots,n), \tag{19}$$

где оптимальное управление $U_k^{(s)}$ ищется из условия минимума квадратичного функционала $v_s(X) \; (s = 1,\dots,n)$.

Используем известные методы отыскания оптимального управления для линейной системы разностных уравнений, изложенных, например, в работе [14].

Вводим квадратичные формы (3.26)

$$V_s\left(k, X_k^{(s)}\right) = \left(X_k^{(s)}\right)^* K(k) X_k^{(s)} =$$

$$= \min_{U_s(i, X_i), j \ge k} \sum_{j=k}^{\infty}\left(\psi_s(j) g_s\left(j, X_i^{(s)}\right) + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(j) V_l\left(X_j^{(s)}\right)\right)$$

$$(s = 1,\dots,n; \; k = 0,1,2,\dots), \tag{20}$$

где положено

$$V_s\left(X_0^{(s)}\right)=\left(X_0^{(s)}\right)^* C_s X_0^{(s)}=V_s\left(0,X_0^{(s)}\right)\ \ (s=1,\ldots,n).$$

При этом приходим к системе нелинейных матричных разностных уравнений типа Риккати $(s=1,\ldots,n)$:

$$K_s(k)=\psi_s(k)Q_s(k)+\sum_{l=1}^{n}q_{ls}(k)C_{ls}^*C_lC_{ls}+A_s^*(k)R_s(k),$$

$$R_s(k)\equiv\left(E+K_s(k+1)B_s^*(k)\psi_s^{-1}(k)L_s^{-1}(k)B_s(k)\right)^{-1}K_s(k+1)A_s(k), \tag{21}$$

а оптимальное управление имеет вид

$$U_k^{(s)}=-\psi_s^{-1}(k)L_s^{-1}(k)B_s^*(k)R_s(k)X_k^{(s)}. \tag{22}$$

При этом будут справедливы формулы

$$C_l=K_l(0)\ \ (l=1,\ldots,n). \tag{23}$$

Систему уравнений (21)-(23) можно записать в равносильной форме

$$S_s(k)=-\left(L_s(k)\psi_s(k)+B_s^*(k)K_s(k+1)B_s(k)\right)^{-1}B_s^*(k)K_s(k+1)A_s(k), \tag{24}$$

где симметрические матрицы $K_s(k)$ удовлетворяют матричным разностным уравнениям

$$K_s(k)=\psi_s(k)Q_s(k)+\sum_{l=1}^{n}q_{ls}(k)C_{ls}^*K_l(0)C_{ls}+$$

$$+A_s^*(k)K_s(k+1)\left(A_s(k)+B_s(k)S_s(k)\right)\ \ (s=1,\ldots,n;\ k=0,1,2,\ldots) \tag{25}$$

Чтобы упростить выкладки, введём вспомогательные матрицы

$$P_s(k+1)=\frac{1}{\psi_s(k)}K_s(k+1)\ \ (k=0,1,2,\ldots), \tag{26}$$

Тогда система уравнений (24), (25) примет простой вид

$$S_s(k)=-\left(Q_s(k)+B_s^*(k)P_s(k+1)B_s(k)\right)^{-1}B_s^*(k)P_s(k+1)A_s(k)\ \ (k=0,1,2,\ldots), \tag{27}$$

где

$$P_s(k)=\frac{\psi_s(k)}{\psi_s(k-1)}\left(Q_s(k)+A_s^*(k)P_s(k+1)\right)\left(A_s(k)+B_s(k)S_s(k)\right)+$$
$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{q_{ls}(k)}{\psi_s(k-1)}C_{ls}^*K_l(0)C_{ls}\qquad (s=1,\dots,n;\ k=0,1,2,\dots). \tag{28}$$

Уравнение (25), соответствующие индексу $k=0$ выписывается по особой формуле

$$K_s(0)\equiv K_s=Q_s(0)+A_s^*(0)P_s(1)\left(A_s(0)+B_s(0)S_s(0)\right) \tag{29}$$

так как $q_{ls}(0)=0\ \ (l,s=1,\dots,n)$.

Полученный вывод сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Пусть дискретная система управления (2) имеет полумарковские коэффициенты, зависящие от полумарковской цепи ζ_k, определяемой интенсивностями $q_{ls}(k)\quad (l,s=1,\dots,n;\ k=1,2,\dots)$. Пусть коэффициенты системы управления (2) и функционала (3) определяются системой уравнений (4). Пусть оптимальное управление $U_k\ \ (k=0,1,2,\dots)$ ищется в виде (5) и решения оптимизированной системы управления имеют скачки решения, определяемые формулами (15). Если оптимальное управление ищется из условия минимума квадратичного функционала (3), то необходимые условия оптимальности определяются системой уравнений (27) - (29).

Литература

1. Валеев К.Г., Дильмурадов Н. О синтезе оптимального управления для линейных разностных уравнений со случайными коэффициентами , зависящими от марковской цепи // ДАН Украины. -1993, № 12.- С. 22-24.

2. Валеев К. Г., Дильмурадов Н. Необходимые условия оптимальности решений системы нелинейных разностных уравнений, зависящих от полумарковской цепи. //Доклады НАН Украины, 1996, №4, -С. 8-11.

3. Дильмурадов Н. О распределении случайных решений систем дискретных уравнений, зависящих от конечнозначной полумарковских цепи // Материалы

научно-практической конференции, посвященной 600-летию Улугбека. – Карши: Каршинский госуниверситет, 1994.-С. 25-30.

4. Дильмурадов Н. Стохастические динамические системы. Карши: Насаф, 2013. – 178 с.

5. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения.- Киев: Наукова думка, 1976. - 182 с.

6. Королюк В.С. Стохастические модели систем. Киев: Наукова думка, 1989. - 208 с.

7. Тихонов В.И., Миронов М.А.. Марковские процессы.- М.: Сов. радио, 1977. - 488 с.

8. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем.- М.: Мир, 1971.- 312 с.

9. Qureshi M. T., Shen X., Gajic Z. Optimal output feedback control of discrete linear, singularly perturbed, stochastic systems. // Int. J. Control. -1992. –Vol. 55, №2. –P. 361-371.