Манжеева Е.С., студент магистратуры

2 курс, факультет «Математики, физики и информационных технологий»

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

Россия, г. Элиста

Мирзаева А.М., студент магистратуры

2 курс, факультет «Математики, физики и информационных технологий»

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

Россия, г. Элиста

Научный руководитель: Копейко В.И.

Кандидат физико-математических наук, доцент

Manzheeva E.S., student of a magistracy

2 course, faculty of Mathematics, Physics and Information Technology

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov

Russia, city Elista

Mirzaeva A.M., student of a magistracy

2 course, faculty of Mathematics, Physics and Information Technology

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov

Russia, city Elista

Scientific director: KopeikoV.I.

Candidate of Physics and Mathematics sciences, associate professor

АННУЛЯТОРЫ И КОМПЛЕКСЫ

The annihilators and complexes

Аннотация: цель работы является рассмотрение примеров комплексов модулей, которые можно рассматривать как обобщенные понятия делителя нуля.

Ключевые слова: Аннуляторы, комплекс Козюля и комплекс де Рама.

Abstract: the purpose of this paper is to consider examples of complexes of modules that can be considered as generalized concepts of the zero divisor.

Keywords: Annihilators, the Koszul complex and the de Rham complex.

Напомним необходимые определения.

Идеалом I в кольце A называется аддитивная подгруппа со свойством A$\cdot I \subseteq I$, то есть a $\cdot$ x $\in I$, для любых a $\in$A и любого x$\in$I.

Например <0>,<1> являются тривиальными идеалами.

Для любого a$\in$A <a>={ax, x$\in$A}- главный идеал порожденного элемента.

Делителем нуля в кольце A называется всякий элемент x, для которого существует y$\neq$0 в A, такой что xy=0.

Пара (M,μ), где M-абелева группа,μ- отображение A×M→M называется A модулем, если выполняются следующие аксиомы, в которых вместо μ*(a,x)(a*$\in A, x \in$*M)* пишем *ax:*

1. *a(x+y)=ax+ay*, $\forall$ *x,y*$\in$ *M;*
2. *(a+b)x=ax+bx*, $\forall\ a, b \in A, \forall\ x \in M$;
3. *(ab)x=a(bx)*, $\forall\ x \in M, \forall\ a, b \in A$;
4. *1x=x*, где 1- единица A.

Пусть M, N – некоторые A-модули. Отображение $f: M \to N$ называется гомоморфизмом A-модулей, если

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$,
2. $f(ax) = af(x)$,
3. $f(1) = 1, x \in M$.

Теорема о гомоморфизм A-модулей: Если отображение $f: M \to N$ является гомоморфизмом A-модулей следует, что $Im\, f = {}^{M}/_{Ker\, f}$ $Imf = N.$

Свободным A-модулем A^n называется любая прямая сумма модулей, изоморфных A.

Последовательность A-модулей и гомоморфизм A-модулей

$$\ldots \to M_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} M_k \xrightarrow{d_k} M_{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} \ldots \qquad (*)$$

называется комплексом, если произведение $d_k \bullet d_{k-1} = 0$, для любых k. Таким образом $Imd_{k-1} \subseteq Kerd_k$.В этом случае отображение d_k называется дифференциалом комплекса.

Если $Imd_k=Kerd_k$, то (*) называется точной последовательностью

Аннулятором модуля M над A называется множество

$$\mathrm{ann}(M)=\{a\in A: a\cdot M=0\},$$

который является идеалом.

Делителем нуля в кольце A называется всякий элемент x, для которого существует y≠0 в A, такой что xy≠0.

Предложение 1: Если выполняются следующие условия

$$(y) \subseteq ann(x)$$

$$(x)\subseteq \mathrm{ann}(y),$$

то последовательность (**) является комплексом.

Предложение 2: Комплекс (**) является точной последовательностью, если

1) *ann(x)=(y)*
2) *ann(y)=(x).*

Пусть A - векторное пространство над k. Если A также является кольцом, то A называется k-алгеброй. Если $\dim_k A < \infty$, то такая алгебра A называется конечномерной k-алгеброй.

Теорема (см 3.6 Бурбаки Н. «Гомологическая алгебра», Наука 1987г)

Для заданных элементов $a_1,a_2,..,a_n \in A$ последовательность гомоморфизмов A-модулей

$$0 \to \wedge^{n}(A^{n}) \xrightarrow{d_n} \wedge^{n-1}(A^{n}) \xrightarrow{d_{n-1}} \wedge^{n-2}(A^{n}) \to \cdots \xrightarrow{d_2} \wedge^{1}(A^{n}) \xrightarrow{d_1} \wedge^{0}(A^{n}) \to 0$$

является комплексом, который называется комплексом Козюля.

Теорема : (см 3.6 Бурбаки Н. «Гомологическая алгебра», Наука 1987г)

Пусть M-m-мерное гладкое многообразие и A=C^{∞}(M)- ℝ-алгебра гладких функций на M, тогда последовательность

$$0 \to \Omega^{0}(\mathrm{M}) \xrightarrow{d_0} \Omega^{1}(M) \xrightarrow{d_1} \Omega^{2}(M) \xrightarrow{d_2} \ldots \to \Omega^{s}(M) \xrightarrow{d_s} \Omega^{s+1}(M) \xrightarrow{d_{s+1}} \Omega^{m-1}(M) \xrightarrow{d_{m-1}}$$
$$\xrightarrow{d_{m-1}} \Omega^{m}(M) \to 0$$

является комплексом A-модулей, который называется комплексом де Рама.

Использованные источники.

1 Лекции «Фундаментальная и компьютерная алгебра». Копейко В.И.

2 Кострикин И.А. «Введение в алгебру», Физматлит 2000г ч. 2,ч.3.

3 Копейко В.И. «Тензорная алгебра» Методические указания, КалмГУ 2012г.

4 Ленг С. «Алгебра», М: Мир, 1968г.

5 Басс Х. «Алгебраическая К-теория», М:Мир 1973г.

6 Бурбаки Н. «Гомологическая алгебра», Наука 1987г

7 Фадеев Д.К. «Линнейная алгебра», Москва Лань 2007г

8 Картан А. Эйленберг С. «Гомологическая алгебра»

9 Маклейн С. «Гомология», М:Мир,1966г

10 Гельфанд С.И., Манин Ю.И. «Гомологическая алгебра», Москва 1989г

11 Зорич В.А. «Математический анализ» часть 2, МЦНМО 2012г