УДК 517.95

Дурдымырадов А.Ш., студент магистратуры

2 курс, факультет «Математики, физики и информационных технологий»

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

Россия, г. Элиста

Инджиева Н.Ю., студент магистратуры

2 курс, факультет «Математики, физики и информационных технологий»

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

Россия, г. Элиста

Манжеева Е.С., студент магистратуры

2 курс, факультет «Математики, физики и информационных технологий»

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

Россия, г. Элиста

Мирзаева А.М., студент магистратуры

2 курс, факультет «Математики, физики и информационных технологий»

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

Россия, г. Элиста

Убушаев Ц.Э., студент магистратуры

2 курс, факультет «Математики, физики и информационных технологий»

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

Россия, г. Элиста

Научный руководитель: Бисенгалиев Р.А.

Кандидат физико-математических наук, доцент

Durdymyradov A.S., student of a magistracy

2 course, faculty of Mathematics, Physics and Information Technology

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov

Russia, city Elista

Indzhieva N.Y., student of a magistracy

2 course, faculty of Mathematics, Physics and Information Technology

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov

Russia, city Elista

Manzheeva E.S., student of a magistracy

2 course, faculty of Mathematics, Physics and Information Technology

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov

Russia, city Elista

Mirzaeva A.M., student of a magistracy

2 course, faculty of Mathematics, Physics and Information Technology

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov

Russia, city Elista

Ubushayev T.E., student of a magistracy

2 course, faculty of Mathematics, Physics and Information Technology

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov

Russia, city Elista

Scientific director: Bisengaliev R.A.

Candidate of Physics and Mathematics sciences, associate professor

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

THE EXISTENCE THEOREM OF A GENERALIZED SOLUTION FOR THE DIRICHLET PROBLEM

Аннотация: Пространства функции с производными из L_p, называемые пространствами Соболева, занимают важное место в современном анализе, например, в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Начиная с 30-ых годов прошлого века эти функциональные классы интенсивно изучались, и к настоящему времени многие связанные с ними проблемы решены. Пространства Соболева являются удобным и естественным математическим аппаратом в теории УЧП. Они широко используются, например, в теории краевых задач для уравнении эллиптического типа, в частности для уравнения Пуассона.
Ключевые слова: краевая задача, пространства Соболева, обобщенные решения, задача Дирихле.

Abstract: Spaces of functions with derivatives of, called Sobolev spaces, occupy an important place in modern analysis, for example, in the theory of partial differential equations. Since the 30s of the last century, these functional classes have been intensively studied, and by now many of the problems associated with them have been solved. Sobolev spaces are a convenient and natural mathematical apparatus in the theory of Uch. They are widely used, for example, in the theory of boundary value problems for elliptic equations, in particular for the Poisson equation.
Key words: boundary value problem, Sobolev spaces, generalized solutions of the Dirichlet problem.

Рассмотрим следующую теорему существования обобщенного решения для задачи Дирихле.

Теорема.

Пусть $f(\mathrm{x}) \in \mathrm{L}_2(\Omega),\ \mu \in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи Дирихле, причем выполняется

$$\| u \|_{W_2^1} \le C_1 \| f \|_{L_2} + C_2 \| \mu \|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

Доказательство. Напомним, что

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \{\mu \in L_2(\partial\Omega):\ \exists\, \Phi \in \mathrm{W}_2^1(\Omega):\ \Phi_{|\partial\Omega} = \mu;$$
$$\|\mu\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{\Phi\in \mathrm{W}_2^1(\Omega),\\ \Phi_{|\partial\Omega}=\mu}} \| \Phi \|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)}\}$$

Сначала уберем неоднородность в краевых условиях. Так как $\mu \in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega) \Rightarrow \exists\, \Phi \in W_2^1:\ \Phi_{|\partial\Omega} = \mu$. Продолжение Ф не единственно, однако обобщенное решение не зависит от выбора Ф. Решение задачи будем искать в виде суммы

$$u = w + \Phi;\ \mathrm{u}|_{\partial\Omega} = \mu,\ \Phi|_{\partial\Omega} = \mu,\ \mathrm{u},\Phi \in \mathrm{W}_2^1(\Omega) \Rightarrow \mathrm{w}|_{\partial\Omega} = 0, w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$$

Подставив выражение $u = w + \Phi$ в определение обобщенного решения получим

$$(\nabla w, \nabla\varphi)_{L_2(\Omega)} = -(\nabla\Phi, \nabla\varphi)_{L_2} + (\mathrm{f}, \varphi)_{L_2(\Omega)}\ \forall\ \varphi \in \overset{0}{W}{}_2^1$$

Пусть $F(\varphi) = \mathrm{F}_1(\varphi) + \mathrm{F}_2(\varphi),\ \ \mathrm{F}_1(\varphi) = -(\nabla\Phi, \nabla\varphi)_{L_2}, \mathrm{F}_2(\varphi) = (\mathrm{f}, \varphi)_{L_2(\Omega)}$ - линейный функционал. Тогда $(\nabla w, \nabla\varphi)_{L_2(\Omega)} = F(\varphi)\ \forall\ \varphi \in \overset{0}{W}{}_2^1$. Так как $\varphi, w \in \overset{0}{W}{}_2^1$ то левую часть последнего равенства можно записать в виде скалярного произведения в $\overset{0}{W}{}_2^1$. Задача нахождения обобщенного решения сводится к задаче нахождения функции $w \in \overset{0}{W}{}_2^1 : \; (\mathrm{w},\varphi)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} = F(\varphi) \;\forall\; \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$. Для доказательства существования обобщенного решения задачи достаточно показать, что правая часть последнего равенства определяет линейный ограниченный функционал в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$.

Ограниченность:

$$\mathrm{F}_1(\varphi) = -(\nabla\Phi, \nabla\varphi)_{L_2} \;\to\; |\mathrm{F}_1(\varphi)| \le \|\nabla\Phi\|_{L_2} \cdot \|\nabla\varphi\|_{L_2}$$

Так как $\|\Phi\|^2_{W_2^1} = \|\Phi\|^2_{L_2} + \|\nabla\Phi\|^2_{L_2} \;\Rightarrow\; \|\Phi\|^2_{L_2} \le \|\Phi\|^2_{W_2^1} \;\Rightarrow$

$$|\mathrm{F}_1(\varphi)| \le \|\Phi\|_{W_2^1} \cdot \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1} \Rightarrow \;\|\mathrm{F}_1\| \le \|\Phi\|_{W_2^1}$$

Аналогично

$\mathrm{F}_2(\varphi) = (\mathrm{f},\varphi)_{L_2(\Omega)} \Rightarrow |\mathrm{F}_2(\varphi)| \le \|\mathrm{f}\|_{L_2} \|\varphi\|_{L_2}$. По неравенству Фридрихса $\|\varphi\|_{L_2} \le C\|\nabla\varphi\|_{L_2}$. Таким образом

$$|\mathrm{F}_2(\varphi)| \le C\|\mathrm{f}\|_{L_2}\|\nabla\varphi\|_{L_2} = C\|\mathrm{f}\|_{L_2}\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1} \;\to\; \|\mathrm{F}_2\| \le C\|\mathrm{f}\|_{L_2}.$$

Следовательно $F(\varphi) = \mathrm{F}_1(\varphi) + \mathrm{F}_2(\varphi)$ - линейный непрерывный функционал в $\overset{0}{W}{}_2^1$, причем $\|F\| \le \|\Phi\|_{W_2^1} + C\|f\|_{L_2}$. Так как $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ - гильбертово пространство, то по теореме Рисса

$$\exists\; \mathrm{h} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 \;: F(\varphi) = (\mathrm{h},\varphi)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \;\Rightarrow\; (\mathrm{w},\varphi)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} = (\mathrm{h},\varphi)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \;\forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$$

$$\to (\mathrm{w}\text{-}\mathrm{h},\varphi)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} = 0 \;\forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 \to\; \mathrm{w}=\mathrm{h}\text{:}\; \|\mathrm{w}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} = \|\mathrm{h}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} = \|F\| \le \|\Phi\|_{W_2^1} + C\|f\|_{L_2}$$

Последнее неравенство выполняется для всех $\Phi \in W_2^1 : \Phi|_{\partial\Omega} = \mu$

Следовательно $\|\mathrm{w}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \le \inf\|\Phi\|_{W_2^1} + C\|f\|_{L_2}$. Теорема доказана.

Использованные источники:

1. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. - 416 с.

2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Учебник для физич. и механико-математ. спец. вузов. — 4-е изд., испр. и доп. — М.: Наука, 1981. — 512 с.: ил.

3. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Обобщенные функции, выпуск 1. — М.: Гос. изд-во физико-мат. лит-ры, 1959. — 470 с.

4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. — М.: Физматлит, 2004. — 572 с.