

BANAX FAZOSIDA OSHKORMAS VA TESKARI FUNKSIYA HAQIDAGI TEOREMALARNING TATBIQLARI HAQIDA

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti professori, N.Dilmurodov

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti magistri, X.Toshpo'latov

Annotatsiya. Oshkomas va teskari funksiyalar haqidagi teoremlar hamda ularning tadbirlariga oid misollar keltirilgan.

Kalit so'zlar: Banax fazosi, oshkormas funksiya va teskari funksiya haqidagi teoremlar.

О ПРИЛОЖЕНИЯХ ТЕОРЕМ О НЕЯВНЫХ И ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЯХ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

профессор Университета информационных технологий и менеджмента,

Н.Дильмурадов

магистр Университета информационных технологий и менеджмента,

Х. Тошпулатов

Аннотация. Приведены теоремы о неявных и обратных функциях, а также примеры их применения.

Ключевые слова: Банахово пространство, теорема о неявных функциях, теорема об обратных функциях.

ON APPLICATIONS OF IMPLICIT AND INVERSE FUNCTIONS THEOREMS IN BANACH SPACE

Professor, University of Information Technologies and Management,

N.Dilmurodov

Master of the University of Information Technology and Management,

Kh.Toshpolatov

Abstract: This paper presents examples related to the theorems of implicit and inverse functions, as well as their applications.

Keywords: Banach space, implicit function theorem, inverse function theorem.

Ma'lumki [1], oshkormas va teskari funksiya haqidagi klassik teorema juda ko'p tatbiqlarga ega. Biz bu teoremlarni Banax fazolari uchun keltiramiz va ularning chegaraviy masalalarni yechishga tatbiq etamiz.

X, Y, Z – Banax fazolari bo'lsin. $L(Y; Z)$ bilan Y fazoni Z fazoga o'tkazuvchi uzluksiz chiziqli akslantirishlar fazosini belgilaymiz, $W = \{(x, y) \in X \times Y \mid \|x - x_0\| < \alpha \wedge \|y - y_0\| < \beta\} \quad (x_0 \in X, y_0 \in Y)$ deylik. $F: W \rightarrow Z$

akslantirishni qaraylik. Tayinlangan $x \in \{x \in X \mid \|x - x_0\| < \alpha\}$ uchun

$D_y F(x, y)$ akslantirishning Freshe ma'nosidagi hosilasini deb belgilaymiz, $(x, y) \mapsto D_y F(x, y) \in L(Y; Z)$. $C(W; Z)$ bilan barcha $f: W \rightarrow Z$ uzluksiz akslantirishlar (funksiyalar) sinfini belgilaymiz.

Teorema 1 [1]. Faraz qilaylik, $F: W \rightarrow Z$ akslantirish quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1. $F(x_0, y_0) = 0$.
2. $F \in C(W; Z)$.
3. $D_y F(x_0, y_0)$ – chiziqli gomeomorfizm.

U holda x_0 nuqtaning X dagi shunday U atrofi va y_0 nuqtaning Y dagi shunday V atrofi topiladiki, ixtiyoriy $x \in U$ uchun y ga nisbatan $F(x, y) = 0$ tenglamaning yagona $y = f(x) \in V$ yechimi mavjud. Bunda $f: U \rightarrow V$ akslantirish uzluksiz bo'ladi.

Eslatma. Agar teoremani shartlariga qo'shimcha F akslantirish n marta uzluksiz differensiallanuvchi ham bo'lsa, topilgan $f: U \rightarrow V$ akslantirish ham n marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi.

Masala 1. Quyidagi nochiziqli chegaraviy masalani qaraylik:

$$y'' + \lambda f(t, y) = 0, \quad 0 < t < l, \quad y(0) = y(l) = 0. \quad (1)$$

Isbotlaymizki, agar f uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu masala 0 ga yaqin $\lambda \in \mathbb{R}$ lar uchun yagona yechimga ega bo'ladi.

Isboti. Ushbu

$$X = \mathbb{R}, \quad Y = \{f: [0; l] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^2[0; l] \wedge f(0) = f(l) = 0\}, \quad Z = C([0; l]).$$

fazolarni kiritaylik. Bu fazolar o'zlarining odatiy normalariga ega deb hisoblanadi.

$F: X \times Y \rightarrow Z$ akslantirishni

$$F(\lambda, y) = y'' + \lambda f(t, y)$$

formula bilan aniqlaylik. F uzluksiz va $F(0, 0) = 0$, ya'ni $\lambda = 0$ da (4) masala $y \equiv 0$

trivial yechimga ega. Shuningdek, agar $y_0 \in Y$ bo'lsa,

$$D_y F(\lambda, y_0)(z) = z'' + \lambda \frac{\partial f(t, y_0)}{\partial y} z,$$

ya'ni

$$(\lambda, y) \mapsto D_y F(\lambda, y)$$

akslantirish uzluksiz.

Endi ushbu $T = D_y F(0, 0): Y \rightarrow Z$ chiziqli akslantirishni qaraylik. Biz shu akslantirishni chiziqli gomeomorfizm ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Ma'lumki [3], har bir $h \in C([0; l])$ uchun

$$v'' = h(t), \quad 0 < t < l, \quad v(0) = v(l) = 0$$

chegaraviy masala yagona yechimga ega va u

$$v(t) = \int_0^l G(t, s) h(s) ds, \quad G(t, s) = \begin{cases} -\frac{1}{l}(l-t)s, & 0 \leq s \leq t \\ -\frac{1}{l}t(l-s), & t \leq s \leq l \end{cases} \quad (2)$$

formula bilan beriladi. (2) munosabatdan T^{-1} ning in'ektiv va uzluksizligi kelib chiqadi, chunki

$$\|v\| = \|T^{-1}h\| \leq c \|h\|, \quad c - const.$$

Demak, oshkormas funksiya haqidagi teoremani barcha shartlari bajariladi.

Shuning uchun nolning yetarlicha kichik atrofida $\lambda \in \mathbb{R}$ larda (1) tenglama yagona $y \in Y$ yechimga ega.

Teorema 2 [1]. Aytaylik, X, Y – Banax fazolari, $U - a \in X$ nuqtaning ochiq atrofi bo'lsin. $f: U \rightarrow Y$ akslantirish uzluksiz differentsiallanuvchi va $Df(a): X \rightarrow Y$ – chiziqli gomeomorfizm ham bo'lsin. U holda a nuqtaning shunday U' atrofi, $f(a)$ ning shunday V atrofi mavjud va bir qiymatli aniqlanadigan shunday g funksiya topiladiki, ular uchun

a) $f: U' \rightarrow V$ – biyektiv akslantirish,

b) $g: V \rightarrow U'$ – biyektiv akslantirish va $\forall x \in U' \quad g(f(x)) = x$,

c) $g \in C^1(V; U')$ va $Dg(f(a)) = D^{-1}f(a)$

xossalar o'rinli bo'ladi.

Teskari funksiya haqidagi bu teorema oshkormas funksiya haqidagi teoremadan standart usulda keltirib chiqariladi.

Masala 2. Ushbu

$$x'' + \lambda x + f(t, x) = g, \quad x(0) = x(2l), \quad x'(0) = x'(2l) \quad (3)$$

chegaraviy masalani qaraylik. Bu yerda $g - 2l$ davrga ega bo'lgan uzluksiz funksiya va $\lambda \in \mathbb{R}$ – parametr.

Quyidagi fazolarni qaraylik:

$$X = C^2([0; 2l]; \mathbb{R}) \cap \{x \mid x(0) = x(2l) \wedge x'(0) = x'(2l)\}, \quad Y = C([0; 2l]; \mathbb{R}).$$

Bu fazolarda odatiy normalar kiritilgan deb hisoblanadi.

Agar f uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda ba'zi λ lar uchun barcha g larda (3) masala yagona yechimga ega.

Isboti. Aytaylik $F: X \rightarrow Y$ funksiya

$$F(x) = x'' + \lambda x + f(t, x)$$

formula bilan berilgan bo'lsin. Ushbu

$$x \mapsto DF(x) \in L(X; Y)$$

akslantirish uzluksiz, ya'ni F akslantirish C^1 sinfga tegishli. Differensial tenglamalar nazariyasidan ma'lumki [3],

$$x'' + \lambda x = h$$

tenglama $\lambda \neq \frac{\pi^2}{l^2} n^2, n = 1, 2, \dots$ bo'lganda har bir $2l$ davrli uzluksiz h funksiya uchun $2l$ davrga ega bo'lgan yagona yechimga ega va $\|x\| \leq C \|h\|$, C – faqat λ ga bog'liq o'zgarmas. Demak, $DF(0) - X$ ni Y ga o'tkazuvchi chiziqli gomeomorfizm.

Teorema 2 ga ko'ra har bir $g \in Y$ va berilgan $\lambda \neq \frac{\pi^2}{l^2} n^2$ uchun (3) masala yagona yechimga ega.

Keltirilgan teoremlar xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalar yechimlarini o'rganishda ham qo'llanilishi mumkin.

Adabiyotlar

- [1] В.А.Треногин. Функциональный анализ. -М.:Физматлит, 2007.
- [2] В.А.Зорич. Математический анализ, ч.2. -М.: МЦНМО, 2019.
- [3] Ф.Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М. Мир, 1973.