Мирзаева А.М., студент магистратуры

2 курс, факультет «Математики, физики и информационных технологий»

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

Россия, г. Элиста

Манжеевна Е.С., студент магистратуры

2 курс, факультет «Математики, физики и информационных технологий»

Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова

Россия, г. Элиста

Научный руководитель: Копейко В.И.

Кандидат физико-математических наук, доцент

Mirzaeva A.M., student of a magistracy

2 course, faculty of Mathematics, Physics and Information Technology

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov

Russia, city Elista

Russia, city Elista

Manzheeva E.S., student of a magistracy

2 course, faculty of Mathematics, Physics and Information Technology

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov

Russia, city Elista

Scientific director: Kopeiko V.I.

Candidate of Physics and Mathematics sciences, associate professor

АЛГЕБРА СО ЗВЕЗДОЧКОЙ.

Algebra with asterisk.

Одним из важных классов алгебр, изучаемых и используемых в современной алгебре, являются алгебра со звездочкой.

One of the important classes of algebras, studied and used in modern algebra is algebra with an asterisk.

1. Определение * - алгебры.

Определение 1. Совокупность **A** элементов *x, y,* … называется алгеброй, если:

1) **A** есть линейное пространство;

2) в **A** введена операция умножения (вообще некоммутативного), удовлетворяющая следующим условиям:

$\alpha\,(x\,y) = (\alpha\,x)\,y,$

$x\,(\alpha\,y) = \alpha\,(x\,y),$

$(x\,y)\,z = x\,(y\,z),$

$(x + y)z = xz + yz,$

$x\,(y + z) = xy + xz$ для любых $x, y, z \in$ **A** и любых чисел α.

Два элемента *x, y* алгебры **A** называются перестановочными, если $xy = yx$. Алгебра **A** называется коммутативной, если все ее элементы попарно перестановочны.

Определение 2. Пусть **A** – алгебра над полем **C** комплексных чисел. Инволюцией в **A** называется такое отображение $x \to x^*$ алгебры **A** в **A**, что

(i) $(x^*)^* = x;$

(ii) $(x + y)^* = x^* + y^*;$

(iii) $(\alpha\,x)^* = \bar{\alpha}\,x^*;$

(iv) $(x\,y)^* = y^*x^*$ для любых $x, y \in$ **C**.

Алгебра над **C**, снабженная инволюцией, называется инволютивной алгеброй или *- алгеброй. Элемент x^* называют сопряженным к *x*.

Подмножество **A**, сохраняющееся при инволюции, называется само-сопряженным.

Из свойства *(i)* следует, что инволюция в **A** необходимо является биекцией **A** на **A**.

2. Простейшие свойства * - алгебр

Определение. Элемент x *-алгебры **A** называется эрмитовым или самосопряженным, если $x^* = x$, нормальным, если $xx^* = x^*x$. Идемпотентный эрмитов элемент называется проектором. Элемент алгебры называется идемпотентным, если все его (натуральные) степени совпадают.

Каждый эрмитов элемент нормален. Множество эрмитовых элементов есть вещественное векторное подпространство **A**. Если x и y эрмитовы, то $(xy)^* = y^*x^* = yx$; следовательно, xy эрмитов, если x и y перестановочны. Для каждого $x \in$ **A** элементы xx^* и x^*x эрмитовы. Но, вообще говоря, эрмитов элемент не всегда представим в этом виде. Действительно, для любого $z \in$ **C** $z\bar{z} \geq 0$, но если z действительно отрицательное число, то его нельзя представить в виде $z\bar{z}$.

Теорема 1. Всякий элемент x *-алгебры **A** можно представить, и притом единственным образом, в виде $x = x_1 + ix_2$, где x_1, x_2 – эрмитовы элементы.

Доказательство. Если такое представление имеет место, то $x^* = x_1 + ix_2$, следовательно:

$$x_1 = \frac{x + x^*}{2}, \qquad x_2 = \frac{x - x^*}{2i} \qquad (1)$$

Таким образом, это представление единственно. Обратно, элементы x_1, x_2, определенные равенством (1), эрмитовы и $x = x_1 + ix_2$.

Эти элементы x_1, x_2 называются эрмитовыми компонентами элемента x.

Заметим, что $\qquad xx^* = x_1^2 + x_2^2 + i(x_2x_1 - x_1x_2)$,

$xx^* = x_1^2 + x22 - i(x_2x1 - x1x2)$

так что x нормален тогда и только тогда, когда x_1 и x_2 перестановочны.

Так как $e^*e = e^*$ есть эрмитов элемент, то $e^* = e$, то есть единица эрмитов элемент.

Если **A** - *-алгебра без единицы, а **A′** - алгебра, полученная из **A** присоединением единицы, то, положив $(\alpha e + x)^* = \overline{\alpha} e + x^*$ при $x \in$ **A**, мы определим инволюцию в **A′**. Так что **A′** станет * - алгеброй. Говорят, что **A′** есть *-алгебра, полученная из **A** присоединением единицы.

Теорема 2. Если x^{-1} существует, то $(x^*)^{-1}$ также существует и

$(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$

Доказательство. Применяя операцию * к обеим частям соотношения

$x^{-1}x = xx^{-1} = e,$

получим $x^*(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}x^* = e.$

Но это означает, что $(x^{-1})^*$ есть обратный к x^*. Подалгебра $\mathbf{A_1}$ алгебры **A** называется *-подалгеброй, если из $x \in \mathbf{A_1}$ следует, что $x^* \in \mathbf{A_1}$.

Непустое пересечение *-подалгебр есть также *-подалгебра. В частности, пересечение всех *-поалгебр, содержащих данное множество **S**$\subset$ **A**, есть минимальная *-подалгебра, содержащая **S.**

Коммутативная *-алгебра называется максимальной, если она не

содержится ни в какой другой коммутативной *-подалгебре.

Теорема 3. Если **B** – максимальная коммутативная *-подалгебра, содержащая нормальный элемент x, и если x^{-1} существует, то $x^{-1} \in$ **B**.

Доказательство. Так как x т x^* перестановочны со всеми элементами из **B**, то этим же свойством обладают x^{-1} и $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$. В силу максимальности **B** отсюда следует, что $x^{-1} \in$ **B.**

Определение 2. Элемент $x \in$ **A** - *-алгебры называется унитарным, если $xx^* = x^*x = e$, иначе говоря, если x обратим и $x = (x^*)^{-1}$.

Унитарные элементы **A** образуют группу по умножению – унитарную группу **A**. Действительно, если x и y – унитарные элементы *-алгебры **A**, то

$((xy)^*)^{-1} = (y^*x^*)^{-1} = (x^*)^{-1}(y^*)^{-1} = xy,$

поэтому xy унитарен, и так как $((x^{-1})^*)^{-1} = ((x^*)^{-1})^{-1} = x^{-1}$, то x^{-1} унитарен.

Использованные источники:

1) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.- М.: Наука, 2002.
2) Рудин У. Функциональный анализ.- М.: Наука, 1975.
3) Кириллов А.А. Элементы теории представлений.- М.: Наука,1978.