

Дудка Н.А., к.техн.н.

доцент

кафедра «Электрооборудование»

Казанский национальный исследовательский технический

университет им. А.Н. Туполева

Россия, г. Казань

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА СИГНАЛА ВЫДЕЛЕННОГО ИЗ ШУМА НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ

Аннотация: В статье предлагаются варианты оценки амплитуды прямоугольного импульсного сигнала выделенного из шума на основе применения непараметрического критерия Уилкоксона. Оценка амплитуды производится в дискретные моменты времени, при этом выборка случайных значений является малой. Для оценки амплитуды импульса на фоне воздействия помех выбраны следующие статистические методы: метод наименьших квадратов; метод на основе применения локальных кубических сплайнов; метод оценки математического ожидания на основе суммирования полусумм значений в случайной последовательности. На основе данных методов предложены алгоритмы обработки зашумленного сигнала и произведена сравнительная оценка точности определения амплитуды импульса. Данная оценка произведена на основе обработки результатов статистического моделирования.

Ключевые слова: импульсный сигнал, непараметрический критерий Уилкоксона, случайные помехи, алгоритмы обработки импульсного сигнала, выделенного из шума, статистические испытания, статистическая оценка амплитуды импульсного сигнала.

Dudka N.A., candidate of technical sciences Associate Professor,

Department of Electrical Equipment

Kazan National Research Technical

University A.N. Tupolev

Russia, Kazan

ESTIMATION OF THE PARAMETER OF A SIGNAL SELECTED FROM NOISE BASED ON THE USE OF A NONPARAMETRIC CRITERION

Abstract: This article proposes methods for estimating the amplitude of a rectangular pulse signal isolated from noise using the nonparametric Wilcoxon signed-rank test. The amplitude is estimated at discrete points in time, using a small sample of random values. The following statistical methods were used to estimate the pulse amplitude in the presence of noise: the least-squares method; a method based on local cubic splines; and a method for estimating the mathematical expectation by summing the half-sums of values in a random sequence. Based on these methods, algorithms for processing a noisy signal are proposed, and a comparative assessment of the accuracy of pulse amplitude determination is performed. This assessment is based on statistical modeling results.

Keywords: pulse signal, nonparametric Wilcoxon test, random noise, algorithms for processing pulse signals extracted from noise, statistical testing, statistical assessment of pulse signal amplitude.

В работах [1,2] представлены результаты исследований по применению непараметрического критерия Уилкоксона [3] для оценки параметров различных сигналов на фоне воздействия помех (шума). Суть работы алгоритма заключается в следующем. Выбирается шаблон размерности N , в котором первые $N/2$ позиций рассматриваются как позиции X , а вторые – как позиции Y . Шаблон накладывается на случайную выборку размерности M , при этом первый элемент выборки для анализа имеет координату $N/2$. В результате первые $N/2$ случайных элементов рассматриваются как выборка X , а вторые $N/2$ - как выборка Y . Далее все элементы ранжируются и вычисляется сумма рангов R выборки Y . Данная процедура производится для всех последующих случайных значений выборки M . В результате этого формируется случайная ранговая функция $f(R)$ с числом значений $M-N+1$ и которая имеет экстремумы. Для прямоугольного импульса при $N = 10$ максимальное значение R для Y выборки равно 40, минимальное значение - 15. Для прямоугольного импульса $R = 40$ означает его начало (фронт), а $R = 15$ означает его окончание (спад). Расстояние между данными отсчетами есть длительность импульса. Также можно вычислить и период следования импульсов. Очевидным является, что точность оценки местоположения начала импульса и его окончания зависит от соотношения сигнал/шум.

В случаях, когда известно, что сигнал представляет собой последовательность (в дальнейшем прямоугольных) импульсов и известны длительность импульсов и период их следования, то возникает задача определения и оценки их амплитуды. Оценка амплитуды будет производиться по случайным значениям сигнала, расположенными между экстремумами ранговой функции. Для дальнейших исследований была выбрана выборка размерности $M = 10$. Такая выборка считается малой с вытекающими отсюда результатами в оценке точности амплитуды сигнала.

В таблице 1 представлен вариант случайного сигнала, полученного в результате моделирования. У исходного сигнала два уровня амплитуды: 4 и 7. Всего в модели использовалось 30 отсчетов. В модели в качестве шума был выбран Гауссов шум с параметрами $N(0,1)$. В данном случае отношение амплитуды сигнала (четыре) к трем сигма (3σ) равно 1.333.

Таблица 1 – Вариант реализации случайного сигнала

Значения амплитуды исходного сигнала														
4	4	4	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	4	4
Сигнал с шумом														
3.27	3.27	3.44	7.29	8.59	7.02	7.42	8.17	6.84	6.04	3.98	6.22	6.16	3.70	2.64
6	0	4	1	2	8	2	7	1	0	2	0	4	3	0
Ранговая функция														
31	37	40	38	32	29	23	16	16	17	19	18	15	17	22
Номера отсчетов сигнала														
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

Для фильтрации сигналов существует большое количество алгоритмов и методов. В данной работе для исследований были выбраны следующие:

- метод наименьших квадратов (сглаживающий полином) [3];
- метод на основе применения локальных кубических сплайнов [4];
- метод оценки математического ожидания на основе суммирования полусумм значений в случайной последовательности.

Метод наименьших квадратов.

Для прямоугольного импульса в качестве сглаживающего полинома подходит уравнение прямой линии (линии аппроксимации) вида:

$Y(x) = ax + b$, где a – угловой коэффициент, b – начальное значение прямой при $x = 0$.

На первоначальном этапе исследований при оценке амплитуды сигнала вычисляемый угловой коэффициент «а» всегда был отличен от нуля, то есть вершина импульса была не горизонтальна. Это закономерно в связи с малой выборкой сигнала. В последующем для горизонтирования данной прямой и, следовательно, оценки амплитуды импульса было предложено производить поворот прямой линии относительно центрального (пятого из десяти) отсчета выборки по следующим зависимостям:

$$B_1 = b - 5x, \text{ для } a < 0;$$

$$B_2 = b + 5x, \text{ для } a > 0.$$

Для оценки точности применения предложенной методики была разработана программа моделирования с амплитудой исходного сигнала, равной 7, и Гауссова шума с параметрами $N(0,1)$. Производилось 5 серий испытаний, в каждой серии соответственно по 1000 испытаний. Средние значения математического ожидания выборок (амплитуды сигнала) представлены в таблице 2, где: MO1- среднее значение математического ожидания сигнала с шумом; MO2 – среднее значение математического ожидания в точках отсчета на линии аппроксимации; MO3 – среднее значение математического ожидания в точках отсчета горизонтальной линии аппроксимации.

Таблица 2 – Значения математических ожиданий по методу наименьших квадратов

Математическое ожидание	Среднее значение математического ожидания	Отклонение (%)
MO1	7.0021	0.030
MO2	7.0021	0.030
MO3	7.0039	0.056

Анализ результатов показывает, что применение непосредственно метода наименьших квадратов дает более точную оценку амплитуды сигнала, в тоже время с точки зрения сохранения формы сигнала возможно применение методики горизонтирования без существенного снижения точности оценки сигнала.

Метод на основе применения локальных кубических сплайнов.

В работе [4] для сглаживания (фильтрации) зашумленных сигналов предлагается использовать метод на основе применения локальных кубических сплайнов. Текущее значение сглаженной функции в точке i определяется следующей зависимостью:

$$F_i = X_{i-1}/6 + 4X_i/6 + X_{i+1}/6, \text{ где}$$

$$i = 2, 3, \dots, n.$$

Важным условием для применения данной зависимости является равенство нулю первого и последнего значения функции F , что не удовлетворяет условиям нашего исследования. Однако интерес представляет использование других коэффициентов для задачи повышения результативности и точности фильтрации сигнала. При моделировании были использованы выше указанные параметры сигнала (случайной последовательности) и шума. Результаты исследований представлены в таблице 3. Как и ранее были проведены 5 серий испытаний по 1000 испытаний в каждой серии. В таблице представлены средние значения оценки амплитуды сигнала по результатам 5 серий. Таким образом, в

результате проведенных исследований набор коэффициентов 0.125/0.75/0.125 дает лучший результат при фильтрации сигнала.

Таблица 3 – Значения результатов оценки математических ожиданий в зависимости от значений коэффициентов метода локальных кубических сплайнов

Значения коэффициентов	Среднее значение	Отклонение (%)
0.12/0.76/0.12	7.013	0.18
0.125/0.75/0.125	6.9984	0.023
0.13/0.74/0.13	6.9976	0.035
0.1428/0.7144/0.1428	6.9972	0.04
0.1666/0.6666/0.1666	6.9916	0.12
0.2/0.6/0.2	6.9946	0.08

Метод оценки математического ожидания на основе суммирования полусумм значений в случайной последовательности.

Для детального анализа сигнала и его фильтрации может быть применено преобразование Хаара [4]. В рамках данной работы интерес представляет использование полусумм отсчетов сигнала. В отличие от преобразования Хаара, в данном случае свычислялось среднее значение суммы полусумм первого значения случайной выборки со всеми последующими. Это искусственная попытка увеличить размерность выборки. Результаты исследований представлены в таблице 4. Как и прежде производилось 5 серий испытаний по 1000 испытаний в каждой.

Таблица 4 – Значения математических охиданий метода суммирования полусумм

Математическое ожидание	Среднее значение	Отклонение (%)
MO1	6.99724	0.040
MO2	6.9955	0.065

В таблице MO1 – среднее значение исходной случайной выборки (сигнала), MO2 – среднее значение предложенного метода суммирования полусумм значений выборки. С учетом того, что число вычислительных операций по сравнению с вычислением среднего значения выборки больше, а точность оценки ниже, использование данного метода является нецелесообразным.

Таким образом, в результате проведенных исследований для оценки амплитуды зашумленного сигнала (малой случайной выборки) из предложенных методов наиболее результативным является метод на основе применения локальных кубических сплайнов.

Применение данного метода в совокупности с применением непараметрического критерия Уилкоксона позволяет оценивать следующие параметры прямоугольных импульсов: длительность импульсов; период следования импульсов; амплитуду импульсов. Очевидно, что для последовательности импульсов полученные оценки могут быть усреднены.

Использованные источники:

1. Дудка Н. А., Фатрахманов А.Р. Исследование алгоритма обнаружения перепадов яркости изображения на основе критерия Уилкоксона. [Электронный ресурс] // Теория и практика современной науки. – 2020. - №11(65) (дата публикации 20.11.2020) – URL: [hthh://www.modern-j.ru](http://www.modern-j.ru) (дата обращения 15.02.2026)
2. Дудка Н.А., Абрамова А.А., Миннегулова Д.И. Оценка возможностей применения непараметрического критерия для исследования зашумленных импульсных сигналов [Электронный ресурс] // Теория и практика современной науки. – 2021. -№11(77) (дата публикации 20 .11.2021) – URL: [hthh://www.modern-j.ru](http://www.modern-j.ru) (дата обращения 15.02.2026)
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ. – мат. Лит.,1986. -554 с.
4. В. Н. Берцун, А. А. Барт. Основы кратномасштабного вейвлет – анализа: учебное пособие. – Томск: Томский государственный университет, 2024. – 102 с.