УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь
Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель
Факультета фундаментальной науки,
университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.
E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО ВИДА ТЕОРЕМЫ ХАНА-ЖОРДАНА

Аннотация: *Теория меры играет важную роль в теории субгармонических и δ-субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина теоремы об компактном множестве в пространстве радоновых мер. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.*

Ключевые слова: *мера Хана, мера Жордана, сингулярная положительная мера, линейный непрерывный функционал, радоновая мера .*

Nguyen Van Quynh.
PhD in Physics and Mathematics, Lecturer
Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam
E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

CONSTRUCTION OF THE GENERAL FORM OF THE HAHN–JORDAN THEOREM

Abstract: *Measure theory plays an important role in the theory of subharmonic and δ-subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the article we sharpen Azarin's variant of the theorem on a compact set in the space of Radon measures. The results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.*

Key words: *Hahn measure, Jordan measure, singular positive measure, linear continuous functional; Radon measures, compact set.*

Уточнённый порядок играет важную роль в теории роста субгармонических функции, в ряде других разделов математики.

Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$ на полуоси $(0,\infty)$ называется уточнённым порядком, если выполняются следующие два условия :

1) существует предел $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r)=\rho(\infty)=\rho\in(-\infty,\infty)$,

2) $\lim\limits_{r\to+\infty} r\ln r\rho'(r)=0$.

В приложениях чаще всего используется не сам уточнённый порядок $\rho(r)$, а функ-ция $V(r)=r^{\rho(r)}$. Отметим следующее свойство уточнённого порядка.

Теорема 1. для любого $t>0$ существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(tr)}{V(r)}=t^{\rho},$$

и этот предел равномерный на любом сегменте $[a,b]\subset(0,\infty)$.

Если $\rho(r)$ – уточнённый порядок, то существует дифференцируемый, и даже анали-тический, уточнённый порядок $\rho_1(r)$ такой, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(r)}{V_1(r)}=1,$$

где $V_1(r)=r^{\rho_1(r)}$.

Поэтому предположение о дифференцируемости уточнённого порядка часто не ограничивает общности рассуждений. В дальнейшем мы будем предполагать, что функ-ция $\rho(r)$ является непрерывно дифференцируемой на полуоси $(0,\infty)$.

Рост произвольной функции $f(r)$ сравнивается с ростом функции вида $V(r)$.

Множество функций вида $V(r)$ – это более широкое множество, чем множество степеней r^{α}, $\alpha\in(-\infty,\infty)$, или множество функций вида $r^{\alpha_0}(\ln r)^{\alpha_1}(\ln_2 r)^{\alpha_2}\ldots(\ln_k r)^{\alpha_k}$, где α_m – вещественные числа, а $\ln_m r$ – это m-тая итерация логарифма. Например, $\ln_2 r=\ln\ln r$.

Пусть $f(r)$ – положительная функция на полуоси $(0,\infty)$. Порядком функции f называется число

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln f(r)}{\ln r}.$$

Важность понятия уточнённого порядка в теории роста функций можно усмотреть из следующей теоремы.

Положительная на полуоси $(0,\infty)$ функция $f(r)$ называется регулярно меняющейся в смысле Караматы, если для любого $\lambda > 0$ существует конечный предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(\lambda r)}{f(r)}.$$

Пусть $\rho(t)$ – некоторый уточнённый порядок. На пространстве R_C определяется одно-параметрическое семейство преобразований Азарина $A_t: R_C \to R_C$, $t\in(0,\infty)$, согласно формулам

$$\mu_t = A_t\mu, \mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V(t)},$$

Для любого борелевского множества E.

Напомним теперь некоторые определения и результаты из теории интеграла и меры.

Пусть в $\mathbb{R}_0^n$ определена вещественная борелевская мера μ, $E\subset\mathbb{R}_0^n$ – борелевское множество. Ограничением(сужением) меры μ на множество E называется мера μ_E, которая определяется формулой $\mu_E(A)=\mu(A\cap E)$ для любого борелевского множества $A\subset\mathbb{R}_0^n$.

Если $\mu_E = \mu$, то говорим, что мера μ сосредоточена на множестве E.

Носителем меры μ (обозначение suppμ) называется наименьшее замкнутое множество, на котором сосредоточена мера.

Меры μ_1 и μ_2 называются взаимно сингулярным, если они сосредоточены на непересекающихся борелевских множествах E_1 и E_2.

Сформулируем следующие известные теоремы,

Теорема Жордана. Всякая вещественная мера однозначно представляется в виде $\mu=\mu_+ - \mu_-$, где μ_+ и μ_- – взаимно сингулярные положительные меры.

Мера μ_+ называется положительной составляющей меры μ.

Мера μ_- называется отрицательной составляющей меры μ.

Теорема Хана. Для любой вещественной меры μ в области G существует разложение G на два непересекающихся множества G_1 и G_2, причем

$\mu(E)\geq 0$ при $E\subset G_1$

$\mu(E)\leq 0$ при $E\subset G_2$

Хотя разложение $G = G_1 \cup G_2$ не единственно, но меры μ_+ и μ_- определяемые формулами $\mu_+(E) = \mu(E \cap G_1)$, $\mu_-(E) = \mu(E \cap G_2)$ не зависят от выбора G_1 и G_2.

Из этих теорем следует, что если μ – вещественная борелевская мера на $\mathbb{R}_0^n$, то существует борелевские множества E_1 и E_2 такие, что

1) $R_0^n = E_1 \cup E_2$,

2) $E_1 \cap E_2 = \varnothing$,

3) $\mu_+ = \mu_{E_1}, \mu_- = \mu_{E_2}$.

Величина $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ называется полной вариацией или модулем меры μ.

Вещественная борелевская мера μ на $\mathbb{R}_0^n$ называется локально конечной, если для любого компакт $K \subset \mathbb{R}_0^n$ выполняется неравенство $|\mu|(K) < \infty$.

Комплексной борелевской мерой называется функция множеств $\mu(E)$, представляемая в виде $\mu(E) = \mu_1(E) + i\mu_2(E)$, где μ_1, μ_2 – конечные вещественные борелевские меры.

Обозначим через M_1 семейство функций множеств , представимых в виде $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1, μ_2 вещественные локально конечные борелевские меры на $\mathbb{R}_0^n$. функция μ определена на борелевских множествах $E \subset \mathbb{R}_0^n$ за исключением тех E, для которых $\mu_1(E) = \mu_2(E) = \pm\infty$. В частности функция μ будет определена и счётно аддитивна на всех борелевских множествах с компактным в $\mathbb{R}_0^n$ замыканием.

Две меры $\mu, \nu \in \mathrm{M}_1$ называются эквивалентными, если выполняется равенство $\mu(E) = \nu(E)$ для любых борелевских множеств E, указанного выше вида.

Теорема 3.1. Всякий элемент $\mu \in \mathrm{M}_1$ эквивалентен разности $\mu_1 - \mu_2$, где где μ_1 и μ_2 – положительные взаимно сингулярные локально конечные борелевские меры на $\mathbb{R}_0^n$. Причем μ_1 и μ_2 определяются однозначно.

Доказательство.

Вначале докажем однозначность. Пусть существует $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ такие, что $\mu_1 - \mu_2 = \mu_3 - \mu_4$, где μ_1 и μ_2 – положительные взаимно сингулярные меры, также как μ_3 и μ_4. Пусть $K \subset \mathbb{R}_0^n$ – произвольный компакт, а $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3, \tilde{\mu}_4$ – ограничения мер $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ на компакт K. Имеем $\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_3 - \tilde{\mu}_4$. Пусть A_1 и A_2 такие множества, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing, A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}^n$, мера μ_1 сосредоточена на A_1, а мера μ_2 сосредоточена на A_2. Пусть $E \subset A_1$. Тогда $\tilde{\mu}_1(E) + \tilde{\mu}_4(E) = \tilde{\mu}_3(E)$, $\tilde{\mu}_1(E) \leq \tilde{\mu}_3(E)$. Если $E \subset A_2$, то $0 = \tilde{\mu}_1(E) \leq \tilde{\mu}_3(E)$. Из этого следует, что $\tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu}_3$.

Аналогично получаем $\tilde{\mu}_1 \geq \tilde{\mu}_3$. Поэтому $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_3$. Отсюда следует, что $\mu_1 = \mu_3$, а следовательно, и $\mu_2 = \mu_4$. Однозначность доказана.

Теперь докажем первое утверждение теоремы. По условию $\mu = \nu_1 - \nu_2$, где ν_1, ν_2 – вещественные локально конечные борелевские меры на $\mathbb{R}_0^n$. Пусть $\gamma_m = \nu_{1,m} - \nu_{2,m}$, $m = 2, 3, \ldots$, где $\nu_{1,m}, \nu_{2,m}$ – ограничения мер ν_1, ν_2 на компакт $B(0,m) \text{¿} \left(0, \frac{1}{m}\right)$. Отметим, что если $k < m$, то мера γ_k есть ограничение меры γ_m на $B(0,k) \text{¿} \left(0, \frac{1}{k}\right)$. Пусть

$$\mathbb{R}_0^n = A_1^{(m)} \cup A_2^{(m)} \qquad (3.1)$$

есть разложение Хана для меры γ_m. Тогда при $k \leq m$ имеем

$$\left(\gamma_k|_{A_1^{(m)}}\right)(E) = \gamma_k\left(E \cap A_1^{(m)}\right) = \gamma\left(E \cap A_1^m \text{¿} B(0,k) \text{¿} \left(0, \frac{1}{k}\right)\right) \geq 0 .$$

Аналогично $\gamma_k|_{A_2^{(m)}} \leq 0$. Поэтому (3.1) есть также разложение Хана для меры γ_k. Далее находим, что

$$\left(\left(\gamma_m\right)_+|_{B(0,k) \text{¿} \left(0, \frac{1}{k}\right)}\right)(E) = \gamma_m\left(E \cap A_1^{(m)} \cap B(0,k) \text{¿} \left(0, \tfrac{1}{k}\right)\right) = \gamma_k\left(E \cap A_1^{(m)}\right) = \left(\gamma_k\right)_+(E) .$$

(3.2)

Это означает, что ограничение меры $(\gamma_m)_+$ на $B(0,k) \setminus C\left(0, \frac{1}{k}\right)$ есть $(\gamma_k)_+$.

Пусть теперь $E \subset \mathbb{R}_0^n$ – произвольное борелевское множество. Из (3.2) следует, что при $k \leq m$ выполняется неравенство $(\gamma_m)_+(E) \geq (\gamma_k)_+(E)$. Таким образом, последовательность $(\gamma_m)_+(E)$ возрастает, также как и последовательность $(\gamma_m)_-(E)$. Определим на борелевских множествах $E \subset \mathbb{R}_0^n$ следующие функции множеств

$$\mu_1(E) = \lim_{m \to \infty} (\gamma_m)_+(E), \qquad \mu_2(E) = \lim_{m \to \infty} (\gamma_m)_-(E).$$

Эти функции положительны. Пусть E_i – дизъюнктная последовательность борелевских множеств $E = \underset{i=1}{\overset{\infty}{\text{¿}}} E_i$. Имеем

$$\mu_1(E) = \lim_{m \to \infty} (\gamma_m)_+(E) = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} (\gamma_m)_+(E_i) .$$

Так как $(\gamma_m)_+(E_i) \leq \mu_1(E_i)$, то справедливо неравенство

$$\mu_1(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(E_i) .$$

С другой стороны

$$\mu_1(E) \geq \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{k} (\gamma_m)_+ (E_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu_1(E_i).$$

Теперь легко вывести, что

$$\mu_1(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(E_i).$$

Таким образом μ_1 – положительная борелевская мера. Если $\bar{E} \subset \mathbb{R}_0^n$ является компактом , то последовательность $(\gamma_m)_+(E)$ является стабилизирующейся. Поэтому мера μ_1 локально конечная. Аналогично доказывается, что μ_2 – положительная локально конечная борелевская мера.

Если борелевское множество E такое, что $\bar{E} \subset \mathbb{R}_0^n$ – компакт, то для достаточно больших n имеем $\mu_1(E) - \mu_2(E) = (\gamma_m)_+(E) - (\gamma_m)_-(E) = \gamma_m(E) = \mu(E)$. Тем самым элемент μ эквивалентен $\mu_1 - \mu_2$.

Обозначим через

$\hat{A}_1^{(2)} = A_1^{(2)} \cap \left(B(0,2) \text{¿} \left(0, \frac{1}{2}\right)\right)$, $\hat{A}_1^{(m)} = A_1^m \cap \left(\left(B(0,m) \text{¿} \left(0, \frac{1}{m}\right)\right) \text{¿} \left(B(0,m-1) \text{¿} \left(0, \frac{1}{m-1}\right) \text{¿} \right)\right)$, $m \geq 2$, $A_1 = \underset{m=2}{\overset{\infty}{\text{¿}}} \hat{A}_1^{(n)}$,

$\hat{A}_2^{(2)} = A_2^{(2)} \cap \left(B(0,2) \text{¿} \left(0, \frac{1}{2}\right)\right)$, $\hat{A}_2^{(m)} = A_2^m \cap \left(\left(B(0,m) \text{¿} \left(0, \frac{1}{m}\right)\right) \text{¿} \left(B(0,m-1) \text{¿} \left(0, \frac{1}{m-1}\right) \text{¿} \right)\right)$, $m \geq 2$, $A_2 = \underset{m=2}{\overset{\infty}{\text{¿}}} \hat{A}_2^{(n)}$.

Выполняются соотношения $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}_0^n$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Пусть E – борелевское множество, $E \subset A_2 \cap \left(B(0,k) \setminus C\left(0, \frac{1}{k}\right)\right)$. Имеем

$$\mu_1(E) = \lim_{k\to\infty} (\gamma_k)_+(E) = \gamma_k\left(E \cap A_1^{(k)}\right) = \gamma_k\left(E \cap \left(\underset{i=1}{\overset{k}{\text{¿}}} \hat{A}_1^{(i)}\right)\right)$$
$$= \sum_{i=2}^{k} \gamma_k\left(E \cap \hat{A}_1^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i\left(E \cap \hat{A}_1^{(i)}\right).$$

Из соотношений $E \cap \hat{A}_1^{(m)} \subset A_1, E \cap \hat{A}_1^{n} \subset A_2$ следует, что $E \cap \hat{A}_1^{(m)} = \varnothing, \mu_1(E) = 0$. Из сказанного следует, что ограничение меры μ_1 на множество A_1 есть ненулевая мера и, значит, мера μ_1сосредоточена на множестве A_1. Аналогично доказывается, что мера μ_2
сосредоточена на A_2. Поэтому меры μ_1 и μ_2 взаимно сингулярны. Теорема доказана.

Список литературы

1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.
2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom,Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.
5. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON A COMPACT SET IN THE SPACE OF RADON MEASURES "Мировая наука" №11 (56) 2021.