УДК 517.3

Хайтакова М., Бегмурадов Н., Худайбергенов Р.

Khaytakova M.,Begmuradov N.,Khudaybergenov R.

Студенты 1 курса магистратуры

направление «Математика»

ФГБОУ ВО «Калмычкий государственный университет

им. Б.Б.Городовикова

Аннотация: *В 10-х годах 20 века интегрирование проникает в пространства, все более удаляющегося от своего первообраза – n – мерного евклидового пространства. Необходимость выхода за пределы евклидовых пространств диктовалась главным образом развитием функционального анализа. При рассмотрении в пространствах общей природы стало неудобным связывать интегрирование функции со свойствами элементов и подмножеств самого пространства (среди этих свойств важнейшим является существование класса множеств определенной алгебраической природы с заданной на нем мерой). В некоторых вопросах стала неудобной точка зрения на интеграл, как на функцию множества, и она уступает точке зрения на интеграл, как на функционал. Выражением этой новой тенденции является определение Даниэля, данное им в 1919г.*

Abstract: *In the 10s of the 20th century, integration penetrates into spaces that are increasingly moving away from their prototype-the n – dimensional Euclidean space. The need to go beyond Euclidean spaces was dictated mainly by the development of functional analysis. When considering in spaces of General nature, it has become inconvenient to associate the integration of a function with the properties of elements and subsets of the space itself (among these properties, the most important is the existence of a class of sets of a certain algebraic nature with a given measure on it). In some questions, the point of view of the integral as a function of the set has become inconvenient, and it is inferior to the point of view* *of the integral as a functional. An expression of this new trend is the definition of Daniel, given by him in 1919.*

Ключевые слова: *интеграл, функция, предел, число, класс, функционал, множество, пространства.*

Keywords: *integral, function, limit, the number, class, functionality and plenty of space.*

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ДАНИЭЛЯ

About the Daniel integral

Определение Даниэля. Прежде чем изложить идею Даниэля (Daniell), мы хотим обратить внимание на то, что, рассматривая две концепции интеграла – интеграла, как функции множества и интеграла, как функционала, - мы вовсе не желаем противопоставлять их друг другу и неразрывно одна с другой связаны; эта связь была ясно выражена уже Лебегом в его аксиомах интегрирования. Интеграл является и функцией множества и функционалом, и можно лишь говорить о том, какой из этих особенностей интеграла мы отдаем предпочтение, а какую мы преднамеренно маскируем из тех или иных соображений.

У Лебега точка зрения на интеграл, как на функцию множества, безусловно, превалировала: это было исторически оправдано. Однако достаточно было бы рассматривать вместо меры неотрицательной функционал *U(f)*, определенный на аддитивном классе линейных комбинаций характеристических функций измеримых множеств отрезка [0, 1] , обладающий свойством однородности и аддитивности (то есть $U\,(f) \geq 0$, *если* $f \geq 0$; $U\,(cf) = cU\,(f)$; $U\,(f_1+f_2) = U\,(f_1) + U\,(f_2)$), *нормированный условиями*

$U\,(x_{E_1}) = U\,(x_{E_2})$, если E_1 и E_2 конгруэнтны, и $U\,(1) = 1$, а затем положить

$$U\,(\phi) = \lim_{n\to\infty} U\,(f_n) \qquad (1)$$

для всякой функции ϕ, являющегося пределом монотонно возрастающей последовательности (f_n) ступенчатых функций. Функционал, определенный с помощью формулы (1), есть не что иное, как интеграл Лебега от неотрицательной функции. При этом понятно, что мы высказали известный факт, пользуясь другим языком: отправной точкой послужило нам не понятие меры, а понятие функционала, заданного на некотором исходном, достаточно простом классе функций (линейных комбинаций характеристических функций).

Если мы пожелаем получить обобщение интеграла, исходя из представления о нем, как о функционале, нам останется вместо класса характеристических функций задать a priori аддитивный класс функций и на нем неотрицательный, однородный и аддитивный функционал U *(f)*, а затем повторить известный процесс продолжение этого функционала, хотя бы с помощью формулы (1). Этот путь обобщения и был избран Даниэлем.

Даниэль рассматривает произвольное пространство *M*. Исходный класс функции T_0 определяется следующим требованиями:

1. Если $f_1, f_2 \in T_0$, то $f_1 + f_2 \in T_0$.
2. Если f € T_0, то cf € T_0, где c – действительное число.
3. Если f_1, f_2 € T_0, то max (f_1, f_2) € T_0 и min (f_1, f_2) € T_0.

   Функции класса T_0 ограничены.

Классом, удовлетворяющим перечисленным требованиям, является, например, класс функций действительного переменного, принимающих конечное число значений с конечным числом точек разрыва. Функции класса T_0 мы будем условно называть « ступенчатыми».

На классе T_0 задан функционал U *(f)*, обладающей следующими свойствами :

(A) U (f_1+ f_2) = U (f_1) + U (f_2).

(C) *U (cf) = cu (f),* где c – действительное число.

(L) (Свойство Лебега). Если $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, то $\lim_{n\to\infty} U(f_n) = 0$.

(P) $U(f) \geq 0$, если $f \geq 0$.

Итак, для « ступенчатых» функций $f \in T_0$ определен «интеграл» $U(f)$. Условия (A), (C), (P) выражают основные свойства интеграла Римана – Стилтьеса $\int f d\varphi$ с монотонно возрастающих последовательностей функций класса T_0, по формуле (1). Условие (L) заготовлено «на будущее» с тем, чтобы обеспечить однозначное продолжение функционала U (f). Следующая фаза построения интеграла - это продолжение функционала U (f) на класс T1 функций, являющихся пределами монотонно возрастающим последовательностей функций класса то, по формуле (1). Независимость этого продолжения от последовательности функций обеспечивается условием (L). Класс T_1, понятно, содержит класс T_0.

Наконец, завершающим этапом построения интеграла от произвольной функции является введение крайних интегралов:

$$\dot{U}(f) \overset{\text{def}}{=} \inf U(\phi),\ \varphi \in T_1, \varphi \geq f,\ \ -\dot{U}(-f) = \underset{\cdot}{U}(f)$$

Функция f называется суммируемой, если $\dot{U}(f) = \underset{\cdot}{U}(f)$, причем они конечны, и тогда $U(f) \overset{\text{def}}{=} U(\dot{f})$; функция оказывается суммируемой тогда и только тогда, когда суммируется ее модуль. Класс суммируемых функций обладает свойствами 1-3 присущими классу T_0. и функционал $U(f)$ на нем обладает свойствами (A), (C), (P), (L). Кроме того, имеют место теоремы Лебега: а) если (f_n) – *монотонная последовательность суммируемых функций, причем* $\lim_{n\to\infty} U(f_n) \neq \pm\infty$, то $\lim_{n\to\infty}(f_n)$ суммируема, $\lim_{n\to\infty} U(f_n) = U(\lim_{n\to\infty} f_n)$; б) если (f_n) – *сходящаяся последовательность суммируемых функций, причем* $|f_n| \leq \phi$, *где* ϕ *суммируема*, то $\lim_{n\to\infty} f_n$ *суммируема*, и $\lim_{n\to\infty} U(f_n) = U(\lim_{n\to\infty} f_n)$.

Общий случай. Рассмотренная выше схема соответствует случаю, когда $U(f)$ – положительный функционал; таким является, например, интеграл Лебега или интеграл Стилтьеса с положительной производящей функцией. Каким образом она видоизменяется, если *U(f)* на T_0 не удовлетворяет условию (P), что имеет, например, место, когда *U(f)* = $\int f\, d\, \phi$ и ϕ немонотонна? В этом случае, как всегда, выделяются положительная и отрицательная части функционала *U (f),* каждая из которых является уже положительным функционалом. Это выделение всегда осуществлялось путем разложения меры (то есть функции ϕ в интеграле Стилтьеса $\int f\, d\, \phi$) на две неотрицательные меры. Но этот способ для нас непосредственно неприемлем, поскольку в явном виде *U (f)* ни от какой меры не зависит! Поэтому указанную процедуру приходится преподнести по другому. Даниэль рассматривает функционал *U (f),* удовлетворяющий всем сформулированным выше условиям, кроме условия (P), которое заменяется следующим.

(M) Существует коечный функционал M(*f*), определенный для положительных функций, удовлетворяющий условию M (ϕ)≤ M (*f*), если ϕ≤ *f*, такой, что *U (f)*≤ M (|f|) для всякой f ∈ T_0).

Функционал, удовлетворяющий условиям (A), (C), (P), (L), удовлетворяют также условию (M) и M(*f*) = *U*(|*f*|*)*. Выделение положительной и отрицательной частей *U (f)* происходит следующим образом: если $f \geq 0$, то

$$U^+(f) \overset{\text{def}}{=} \sup_{0\leq\phi\leq f} U\,(\phi).$$

В общем случае, когда $f = f^+ - f^-$, то)

$$U^+(f) \overset{\text{def}}{=} U^+\,(f^+) - U^+\,(f^-)$$

и

$$U^-(f) \overset{\text{def}}{=} U^+\,(f) - U\,(f).$$

$U^+(f)$, $U^-(f)$ удовлетворяет условиям (A), (C), (P), (L). Способом, указанным выше, строится продолжение функционалов $U^+(f)$, $U^-(f)$ на классы суммируемых (относительно них) функций; пересечение этих классов не пусто, поскольку каждый из них содержит класс T_1. Функция f называется суммируемой, если она суммируема относительно $U^+(f)$ и $U^-(f)$, и тогда

$$U(f) \stackrel{\text{def}}{=} U^{+}(f) - U^{-}(f).$$

Итак, построено обобщение, содержащее, как замечает Даниэль, методы интегрирования Лебега и Стилтьеса. Эти методы соответствуют специальному выбору класса T_0 и функционала $U(f)$ на нем.

Даниэль указывает, что если мы желаем исходить при построении интеграла из меры, заданной на достаточно простом классе множеств, то в качестве T_0 следует взять линейные комбинации характеристических функций, а $U(f)$ определить как линейную комбинацию соответствующих мер. Даниэль строит конкретные примеры интеграла в бесконечномерных пространствах (пространствах Фреше).

Процедура построения интеграла Даниэля является перефразировкой известных конструкций, использующих понятие меры. Возможно ли обратное – интерпретировать интеграл Даниэля как интеграл по некоторой мере, или вообще как меру? Во всяком случае, следующая интерпретация напрашивается сама собой: превратим функционал $U(f)$ в функцию множества в пространстве пар (y,p), где y- действительное число, а p – элемент исходного пространства M, считая $U(f)$ функцией множества, заданной на ординатных множествах $E(0 \leq y < f,\ p \in M)$ положительных функций f класса T_0 (таким образом, класс ординатных множеств, на которых мера $U(f)$ задается первоначально, обладает определенной алгебраических структурой). Тогда – пренебрегая деталями – можно утверждать, что продолжения функционала $U(f)$ на класс суммируемых функций соответствует в новой интерпретации выделению измеримых (ординатных) множеств относительно внешней меры, построенной с помощью функции множества $U(f)$.

Даниэль с помощью функционала $U(f)$ вводит в пространстве M понятие меры и измеримой функции; на основе этих понятий устанавливается более тесная аналогия между теорией Даниэля и теорией интеграла Лебега.В дальнейшем интеграл Даниэля подвергался различным модификациям. В настоящее время известен ряд вариантов построения этого интеграла .

Литература

1. Ф.А. Медведев. Развитие понятия интеграла. Изд. Наука. Москва. 1974.
2. И.Н. Песин. Развитие понятия интеграла. Изд. Наука. Москва. 1966.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, 2, 3. М.: Высшая школа . 1968.
4. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т.1, 2. - М.: Высшая школа, 1989
5. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, т.1, 2. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, т.1, 2. – любое издание.
7. А.П. Юшкевич. История математики. Т.3. - 1972, 496с.
8. Рыбников К.А. История математики. т.2 - 1963, 336с.