

Ротова О.М.

студент

факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»

Московский государственный технический университет имени

Н.Э. Баумана

Россия, г. Москва

Циплугин В.А.

студент

факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»

Московский государственный технический университет имени

Н.Э. Баумана

Россия, г. Москва

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ СОДУ С
НЕТОЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Аннотация: Данная работа посвящена обоснованию актуальности исследования и применения интервальных численных методов решения задачи Коши для СОДУ с неточными параметрами. В связи с развитием таких направлений науки и техники, как механика, теплотехника, математическая химия, самолетостроение, возникла потребность не только вычисления приближенных решений различных задач, но и гарантированная оценка их близости к точным решениям. Более того, возникла проблема решения задач с нечеткими параметрами. В качестве примера подобных задач можно привести различные экологические или экономические модели, для которых невозможно задать точные значения параметров. Для таких систем решением данной проблемы может являться использование методов статистического, стохастического или

интервального анализа. В данной работе рассматриваются методы интервального анализа.

Ключевые слова: интервальный анализ, СОДУ с интервальными параметрами, интервальные параметры, метод Мура, численные методы.

Rotova O.M.

student

Faculty of Robotics and complex automation

Moscow State Technical University named after

N.E. Bauman

Russia, Moscow

Tsiplugin V.A.

student

Faculty of Robotics and complex automation

Moscow State Technical University named after

N.E. Bauman

Russia, Moscow

**THE USE OF INTERVAL ANALYSIS METHODS IN RELATION TO
THE NUMERICAL SOLUTION OF DAEs WITH INACCURATE
PARAMETERS**

Annotation: This article is devoted to substantiating the relevance of the study and application of interval analysis methods for solving SODEs with fuzzy parameters. Nowadays, there is a need not only for calculating approximate solutions of various problems, but also for interval, which guaranteed contains solution, because of progress in such areas of science and technology as mechanics, heat engineering, mathematical chemistry, aircraft construction and etc. Moreover, there is a huge area of problems with fuzzy parameters. As an example of such problems, we can remember various ecological or economic models for which it is impossible to receive the accurate parameters. For such

models, the problem could be solved by methods of statistical, stochastic or interval analysis. In this paper, methods of interval analysis are considered.

Key words: Interval analysis, SODE with interval parameters, interval parameters, Moore method, numerical methods.

В связи с развитием таких направлений науки и техники, как механика, теплотехника, математическая химия, самолетостроение, возникла потребность не только вычисления приближенных решений различных задач, но и гарантированная оценка их близости к точным решениям. Вследствие этого, возрос интерес к интервальному анализу и вопросам двухсторонних оценок, как к возможным средствам оценки погрешностей. Интервальный анализ появился сравнительно недавно как метод автоматического контроля ошибок округления на ЭВМ. Впоследствии он превратился в один из разделов вычислительной математики, учитывающий также ошибки дискретизации численных методов, ошибки в начальных данных и т.п. Основная идея интервального анализа состоит в замене арифметических операций и вещественных функций над вещественными значениями на интервальные операции и функции, преобразующие интервалы, содержащие эти значения [1, 2].

Помимо интервальных методов моделирования погрешности существуют статические [4], стохастические и иные [3] методы. Однако, несмотря на даваемое в целом неплохое качественное представление о поведении ошибки, они не дают гарантированных оценок для конкретных приближенных решений.

Однако, интервальные методы имеют некоторые проблемы, связанные с интервальной арифметикой в целом [1, 5, 7]:

1. Проблема расширения интервала при повторном включении переменной в расчет;
2. Эффект Мура, он же «эффект обертывания»;

3. Невозможность точного описания сложных по форме многомерных множеств.

При анализе существующих статей по теме численного решения ОДУ с интервальными коэффициентами (в дальнейшем, ИОДУ) было обнаружено, что возможна реализация методов интервального анализа существующими языками программирования, что неоднократно осуществлялось различными исследователями. Обзор существующих библиотек приведен в докладе [8]. В нем указаны 5 библиотек, реализующих методы с использованием разложения Тейлора с различными модификациями:

1. AWA – библиотека для решения ИОДУ, разработанная Р. Лонером;
2. ADIODES – реализация C++ решателя ИОДУ;
3. COSY INFINITY – библиотека, реализованная на языке Fortran и предназначенная для проектирования и изучения систем лазерной физики;
4. VNODE – библиотека, реализованная на языке C++ для решения ИОДУ;
5. VSPODE – модификация библиотеки VNODE для улучшения точности решения.

Обзор методов интервального анализа

Многие методы интервального анализа были получены еще в прошлом веке. Однако, они имеют различные проблемы, препятствующие их широкому использованию. Несколько статей с описанием улучшений методов интервального анализа описаны ниже.

В статье [6] рассматриваются модификации методов на основе рядов Тейлора, позволяющие многократно снизить влияние эффекта обертывания увеличение радиуса интервала решения применительно к некоторым нелинейным системам – модели Лотки-Вольтерра, осциллятора Ван дер Поля и нелинейного консервативного осциллятора. Достигнуто

это было за счет потери части решения. Обоснованием подобного подхода случит тот факт, что при изначально равномерном распределении весовой функции нечеткого числа, в итоге получается распределение схожее с распределением Гаусса – крайние области решения на промежуточном шаге имеют очень малое значение весовой функции и низкое влияние на решение на следующем шаге. В результате при применении данных модификаций к модели Лотки –Вольтерра удалось снизить эффект обертывания до 21% при потере всего 1% области решения.

В статье [7] рассматривается способ минимизации эффекта обертывания. Автору удалось показать эффективность и, что наиболее важно, стабильность метода на примере линейной колебательной системы. В результате расчетов, система сохраняла стабильность в течении 60 подходов, в то время как классический вариант модифицированного метода расходится уже на первом подходе.

Также стоит отметить исследования [9, 10, 11] на тему применения методов интервального анализа при расчете негомогенной линейной системы ИОДУ (в дальнейшем - ИСОДУ), где авторам удалось успешно получить решение негомогенной линейной ИСОДУ и продемонстрировать применение своих результатов к реальным физическим моделям.

Пример практического применения методов интервального анализа показан в статье [12]. В данной публикации рассматривается новая модель жертва-хищник, при условии неточной природы биологических параметров. Авторам статьи удалось получить условие устойчивости при неточности коэффициентов. Помимо этого, в статье рассматривается вопрос оптимальной политики сбора урожая и находится оптимальное решение при неточных биологических параметрах.

Другой пример практического применения ИСОДУ показан в статье [13]. В этой публикации исследователями была разработана модель производства продуктов питания с технологией хранения и кредитным спросом в условиях риска неисполнения капитала в условиях

неопределенности, получено решение этой модели с помощью интервальных методов и проведен анализ возможных путей оптимизации прибыли в рамках данной экономической модели.

История развития объекта поиска. Основные тенденции развития

Интервальная арифметика не является совершенно новым явлением в математике; в истории она несколько раз появлялась под разными именами. Например, Архимед в III веке до н. э. рассчитал нижнюю и верхнюю границы для числа π .

Хотя вычисления с интервалами не были столь же популярны, как другие численные методы, но они не были полностью забыты.

Новая история интервальных вычислений начинается в 1931 году с работы Розалинды Сесили Янг, где были приведены правила вычисления с интервалами и другими подмножествами вещественных чисел. В 1951 году появился учебник Пола С. Дуайера по линейной алгебре, в нём эта тема рассматривалась с точки зрения повышения надёжности цифровых систем — интервалы использовались для оценки ошибок округления, связанных с числами с плавающей запятой. В 1958 году Терио Сунага опубликовал подробный доклад о применении интервальной алгебре в численном анализе.

Во второй половине XX века потребности компьютерных вычислений вызвали бурное развитие интервального анализа практически одновременно и независимо в Советском Союзе, США, Японии и Польше. В 1966 году появилась книга американского математика Рамона Мура «Интервальный анализ». Достоинство этой работы заключалось в том, что, начиная с простого принципа, он предоставлял общий метод для автоматического анализа ошибок, причём не только ошибок, возникающих в результате округления.

В последующие два десятилетия важные исследования по интервальному анализу и его приложениям велись в Германии — Карлом

Никелем и его учениками в Университете Фрайбурга, в группах Ульриха Кулиша и Гётца Алефельда в Университете Карлсруэ, и других.

В 1988 году Рудольф Лонер разработал программное обеспечение на основе языка Фортран для решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В начале 2000-х годов были созданы библиотеки VNODE и VSPODE для получения численного решения задачи Коши для ИОДУ и ИСОДУ.

В России и СССР интервальной тематикой активно занимался с 1920-х годов В. М. Брадис. В 1962 году один из первых выпусков «Сибирского математического журнала» опубликовал статью Леонида Витальевича Канторовича, который, фактически, наметил основы интервального анализа в частично упорядоченных пространствах и приложения новой техники. В его статье эта тематика была обозначена как приоритетная для нашей вычислительной науки. В послевоенный период одной из первых стала книга Ю. И. Шокина «Интервальный анализ». В следующем году появилось учебное пособие Т.И. Назаренко и Л.В. Марченко «Введение в интервальные методы вычислительной математики», а в 1986 году — монография С. А. Калмыкова, Ю. И. Шокина и З. Х. Юлдашева «Методы интервального анализа».

Существующие перспективные современные разработки

В конце введения текущей работы были приведены современные прикладные разработки численного решения ИСОДУ. Наиболее современными разработкой являются библиотеки VNODE [15] и VSPODE [14], написанные на языке C++. Рассмотрим данные разработки поподробнее.

Для начала стоит отметить, что все указанные библиотеки используют метод интервальных рядов Тейлора, каждый шаг которого состоит из двух этапов: получение величины следующего шага и первоначальной, грубой оценки интервала на следующем шаге; уточнение решения и получения

максимально точного интервала, гарантированного содержащего решение задачи.

Библиотека VNODE (Validated Numerical ODE) – это объектно-ориентированная библиотека, реализованная на языке C++ и использующая метод постоянного приближения высокого порядка в качестве алгоритма для этапа 1 и интервальный метод Эрмита-Обрешкова в качестве алгоритма для этапа 2. Библиотека VNODE может использовать интервальные параметры и интервальные начальные условия в качестве входных данных. Одним из недостатков библиотеки VNODE является то, что при использовании интервальных параметров в системе ОДУ, результаты метода довольно часто начинают сильно расходиться уже на ранних шагах, что не позволяет получить корректное решение на заданном отрезке.

Библиотека VSPODE (Validating Solver for Parametric ODEs) – это библиотека, написанная на языке C++ и являющаяся своеобразным расширением библиотеки VNODE для более эффективного расчета задач Коши с интервальными параметрами. В качестве алгоритма для этапа 1 используется метод постоянного приближения высоко порядка. В качестве алгоритма для этапа 2 используются интервальные ряды Тейлора, для которых предварительно выполняются определенные преобразования над интервальными параметрами, что позволяет значительно снизить эффект обертывания и получать более адекватные результаты для параметрических ОДУ.

Заключение

В результате данной обзорной статьи были сделаны следующие выводы:

1. Использование методов интервального анализа оправдано при моделировании задач с неточными параметрами.

2. Методы интервального анализа в отличие от иных методов оценки ошибки вычисления дают гарантированные решения для конкретных приближенных значений.

3. Методы интервального анализа для решения ОДУ с интервальными коэффициентами активно используются в современной науке, несмотря на весьма значительные проблемы с малым количеством исследований по данным методам, по определению величины шага, поведения методов решения задачи Коши для различных нелинейных ИСОДУ.

Таким образом, данное направление исследований является перспективным, несмотря на некоторые проблемы в данной области.

Использованные источники:

1. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ, Издательство «XYZ», Новосибирск, 2018. – 622 с.
2. Добронев Б.С. Интервальная математика, КрасГУ, Красноярск, 2004. – 216 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы, Издательство «Наука», Москва, 1987
4. Воеводин В.В. Об асимптотическом распределении ошибок округления при линейных преобразованиях // Журн. Вычисл. математики и мат. физики – 1967, Т. 1, №5 – С. 965-977 с.
5. Орлов А.И., Луценко Е.В. Системная нечеткая интервальная математика, КУБ ГАУ, Краснодар, 2014. – 600 с.
6. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Модификация методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами, Журнал «Труды МАИ», вып. №89, Москва, 2016.
7. Рогоза А.А. Об одном подходе к построению двусторонних оценок множеств решений нелинейных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами на основе проекционных методов,

МГТУ им. Баумана Калужский филиал, Журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления», Калуга, 2010.

8. Позин А.В. Обзор методов и инструментальных средств решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с гарантированной оценкой погрешности, 2011, URL: <http://conf.nsc.ru/niknik-90/reportview/37500>
9. Gasilov N. A., Amrahov Ş. E. On the Numerical Solution of Linear Differential Equations with Interval Coefficients. URL: https://www.researchgate.net/publication/332372745_On_the_Numerical_Solution_of_Linear_Differential_Equations_with_Interval_Coefficients
10. Fatullayev A. G., Gasilov N. A., Amrahov Ş. E. Solution method for a non-homogeneous fuzzy linear system of differential equations, Journal «Applied Soft Computing».
11. Gasilov N. A., Amrahov Ş. E. Solving a nonhomogeneous linear system of interval differential equations, URL: <https://doi.org/10.1007/s00500-017-2818-x>
12. Pal, D., Mahapatra, G.S. & Samanta, G.P. Stability and bionomic analysis of fuzzy parameter based prey–predator harvesting model using UFM. Nonlinear Dyn 79, 1939–1955 (2015), URL: <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1784-4>
13. Rahman M.S., Manna A.K., Shaikh A.A., Bhunia A.K. An application of interval differential equation on a production inventory model with interval-valued demand via center-radius optimization technique and particle swarm optimization, International Journal of Intelligent Systems, 35 (8), pp. 1280-1326 (2020).
14. Lin Y., Stadtherr M.A. Validated solutions of initial value problems for parametric ODEs // Applied Numerical Mathematics. 2007. Vol. 57, N 10. P. 1145–1162.

15.Nedialkov N.S. The design and implementation of an object-oriented validated ODE Solver.