УДК 517.538.3

Хайтакова М., Бегмурадов Н., Худайбергенов Р.

Khaytakova M.,Begmuradov N.,Khudaybergenov R.

Студенты 2 курса магистратуры

направление «Математика»

ФГБОУ ВО «Калмыцкий государственный университет

им. Б. Б. Городовикова»

Аннотация: *В математике последовательностью ортогональных многочленов называют бесконечную последовательность действительных многочленов*

$$p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots$$

где каждый многочлен $p_n(x)$ *имеет степень* n, *а также любые два различных многочлена этой последовательности ортогональны друг другу в смысле некоторого скалярного произведения, заданного в пространстве* L^2.

Понятие ортогональных многочленов было введено в конце XIX в. в работах Чебышёва П. Л. по непрерывным дробям и позднее развито Марковым А. А. и Стилтьесом Т. И. и нашло различные применения во многих областях математики и физики.

Abstract: *In mathematics, a sequence of orthogonal polynomials is called a sequential sequence of real polynomials*

$$p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots$$

where each polynomial $p_n(x)$ *has degree n, and also two different polynomials of this other are orthogonal to each other in some sense of the scalar product defined in the space* L^2.

The concept of orthogonal polynomials was introduced at the end of the 19th century. in the works of P.L. Chebyshev on continued fractions and later developed by A.A. Markov and T.I. Stieltjes and found various applications in many areas of mathematics and physics.

***Ключевые слова**: система, многочлен, функция, уравнения.*

***Keywords :** system, polynomial, function, equations.*

Orthogonal polynomials

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Ортогональные многочлены, специальные системы многочленов $\{p_n(x)\}$; $n =$ 0, 1, 2,..., ортогональных с весом $r(x)$ на отрезке $[a, b]$. Нормированная система О. м. обозначается через $\hat{\rho}_n$, а система О. м., старшие коэффициенты которых равны 1,— через $\tilde{\rho}_n$. В краевых задачах математической физики часто встречаются системы О. м., для которых вес r(x) удовлетворяет дифференциальному уравнению (Пирсона)

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

Многочлен $p_n(x)$ такой системы удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\beta(x)\rho_n''(x) + [\alpha(x) + \beta'(x)]\rho_n'(x) - \gamma_n \rho_n(x) = 0$$

где $g_n = n [(a_1 + (n + 1)b_2]$.

Наиболее важные системы О. м. (классические) относятся к этому типу; они получаются (с точностью до постоянного множителя) при указанных ниже a, b и $r(x)$.

1) *Якоби многочлены* $\{P_n^{(l,m)}(x)\}$ — при $a = -1$, $b = 1$ r(x) $=(1—x)^l(1+x)^m$, l >−1, m >−1. Специальные частные случаи многочленов Якоби соответствуют следующим значениям l и m: l = m— *ультрасферические многочлены* $P_n^{|\lambda|}(x)$ (их иногда называют многочленами Гегенбауэра); 1 = $m = -1/2$, т.е. $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ – *Чебышева многочлены* 1-го рода $T_n(x)$; 1 = $m = 1/2$, т.е. $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ – *Чебышева многочлены* 2-го рода $U_n(x)$; l = m = 0, т. е. r(x) º 1 — Лежандра многочлены $P_n(x)$.

2) Лагерра многочлены $L_n(x)$ — при $a = 0$, $b = +\gamma$ и r(x) $= e^{-x}$ (их наз. также многочленами Чебышева — Лагерра) и обобщённые многочлены Лагерра $L_n^{\infty}(x)$ — при $\rho(x) = x^{\infty}e^{-x}(\alpha > -1)$.

3) *Эрмита многочлены* $H_n(x)$ — при $a = -\gamma$, $b = \gamma$ и $\rho(x) = e^{x^2}$ (их называют также многочленами Чебышева — Эрмита).

О. м. обладают многими общими свойствами. Нули многочленов $p_n(x)$ являются действительными и простыми и расположены внутри $[a, b]$. Между двумя последовательными нулями многочлена $p_n(x)$ лежит один нуль многочлена $p_{n+1}(x)$. Многочлен $p_n(x)$ может быть представлен в виде т. н. формулы Родрига

$$p_n(x) = A_n \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}\{\rho(x)\beta^n(x)\},$$

где A_n — постоянное, а *b(x)* см. формулу (*). Каждая система О. м. обладает свойствами замкнутости. Три последовательных О. м. $\tilde{P}_n(x)$, $\tilde{P}_{n+1}(x)$, $\tilde{P}_{n+2}(x)$ связаны рекуррентным соотношением:

$$\tilde{P}_{n+2}(x) = (x - \alpha_{n+2})\tilde{P}_{n+1}(x) - \lambda_{n+1}\rho_n(x),$$

где a_{n+2} и l_{n+2} следующим образом выражаются через коэффициенты этих многочленов, если:

$$\tilde{p}_k(x) = x^k + \sum_{j-0}^{k-1} ə_{kj} x^j,$$

то

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1,n} - \alpha_{n+2,n+1},$$

$$\lambda_{n+1} = \alpha_{n+1,n-1} - \alpha_{n+2}\alpha_{n+1,n} - \alpha_{n+2,n}$$

Общая теория О. м. построена П. Л. *Чебышевым*. Основным аппаратом изучения О. м. явилось для него разложение интеграла $\int_b^a \frac{\rho(t)dt}{x-t}$ в непрерывную дробь с элементами вида $x — a_n$ и числителями 1_{n-1}. Знаменатели $j_n(x)/p_n(x)$ подходящих дробей этой непрерывной дроби образуют систему О. м. на отрезке $[a, b\ ]$ относительно веса r(x).

Приведённые выше классические системы О. м. выражаются через *гипергеометрическую функцию*.

Литература

1) Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962.
2) *Бейтмен Г., Эрдейи А.* . Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены // Высшие трансцендентные функции. Т. 2. / Пер. с англ. Н. Я. Виленкина. — М.: Наука, 1966. — 296 с.
3) Исмаил, Мурад ЕН (2005). Классические и квантовые ортогональные многочлены от одной переменной.