***Ахмедова Ф.А.,***
***преподаватель математики академического лицея Ташкентского Международного Вестминстерского университета,***
***Хабибуллина М.М,***
***преподаватель математики академического лицея Ташкентского Туринского Политехнического университета***

# ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

# THE MAIN TYPES OF IRRATIONAL EQUATIONS

**Аннотация**: в статье исследованы основные виды иррациональных уравнений.

**Ключевые слова:** Иррациональные уравнения, уравнение, степень, математика, высшая математика

**Abstract:** the main types of irrational equations are investigated in the article.

**Keywords**: Irrational equations, equation, degree, mathematics, higher mathematics

**Цель урока:** обобщить, систематизировать по типам иррациональные уравнения и отработать алгоритм решения иррациональных уравнений повышенной трудности, научить выбирать правильный метод решения иррациональных уравнений.

**План урока:**

I. *Повторение и обобщение теоретического материала, сопровождая простейшими уравнениями (устно 4 уравнения)*

II. *Рассмотреть иррациональные уравнения различных типов. Раздать карточки с заданиями основных типов иррациональных уравнений (13 типов)*

III. *Решение задач из части С по книге «Единый государственный экзамен»*

IV. *Подведение итогов урока. Домашнее задание*

**Ход урока:**

Слова учителя: Чтобы научиться хорошо решать иррациональные уравнения надо знать, какие основные типы иррациональных уравнений встречаются, и, посмотрев на иррациональное уравнение, не надо пугаться, необходимо нацеливать свои мысли на то, какими методами можно решить это уравнение.

Иногда бывает так, что, начав необдуманно решать уравнение, можно иметь столь устрашающий вид, что поневоле возникает мысль о другом подходе к решению исходного уравнения. А это грозит потерей времени, а время на ЕГЭ – самое главное. И поэтому надо сразу найти верный подход к решению задач.

Значит, у вас должен быть выработан определенный алгоритм решения иррациональных уравнений.

На этом уроке мы с вами этим и займемся.

Вначале немного вспомним теорию об иррациональных уравнениях.

*I. Повторение и обобщение теоретического материала*

Вопросы:

1. Определение иррационального уравнения

2. Основная идея решения иррациональных уравнений

3. Основные методы решения иррациональных уравнений.

Ответ:

а) возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень

б) введение новой переменной

в) некоторые специальные приемы, позволяющие освободиться от радикалов или упрощающие иррациональные уравнения

г) метод оценки

4. При решении иррациональных уравнений необходимо помнить следующие свойства, формулы и теоремы:

1) свойство корней и степеней;

2) формулы сокращенного умножения:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 + b^4 \pm 4ab(a \pm b)^2 - 2a^2b^2$$

3) теоремы:

**Теорема 1.** Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень приводит к уравнению, равносильному данному

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (f(x))^{2n+1} = (g(x))^{2n+1}$$

**Теорема 2.** При возведении обеих частей уравнения в любую четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного, следовательно, при этом возможно появление посторонних корней.

$$f(x) = \varphi(x) \Rightarrow [f(x)]^{2n} = [\varphi(x)]^{2n}$$

При использовании этой теоремы проверка обязательна! Если корни иррационального уравнения иррациональные числа, то проверка неудобна, и поэтому лучше решать уравнения, используя условия равносильности.

**Теорема 3.**

а) $\sqrt[2n]{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) = (\varphi(x))^{2n} \end{cases}$

б) $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x) \\ f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$

Не решая уравнений, объяснить, почему каждое из них не имеет решений:

а) $\sqrt{x-4} = -3$

б) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+6} = 0$

в) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = -3$

г) $\sqrt{x} + \sqrt{2x+10} = -1$

***II. Задания по карточкам***

На карточках написаны иррациональные уравнения 12 типов. Устно объяснить методы решения этих уравнений.

**1 тип**.

1) $\sqrt{5-x}-\sqrt{7-x}+\sqrt{2x-15}=2$

2) $\sqrt[6]{x^2-81}+\sqrt[6]{81-x^2}+\sqrt[3]{x^2-54}=3.$

3) $\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x-1}=1.$

*Метод решения:* учитывая ОДЗ.

**2 тип**. Уравнения, содержащие одинаковые радикалы.

4) $\sqrt{x^2+x-3}=\sqrt{1-2x}$

5) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x+19}=0$

6) $\sqrt{8-5x}=\sqrt{x^2-16}$

*Метод решения:* возведение обеих частей в одинаковую степень (в квадрат).

**3 тип**. В левой части уравнения – произведение корней, а в правой – выра жение с переменной или положительное число.

1) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+4}=\sqrt{6}$

2) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+6}=x+3$

3) $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{5-x}=2$

*Метод решения:* возведение обеих частей уравнения в квадрат при условии, что правая часть положительна.

**4 тип**. Обе части уравнения содержат одинаковые множители.

1) $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$

2) $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x+2$

3) $(x+2)\sqrt{16x+33}=(x+2)(8x-15)$

*Метод решения:* общий множитель вынести за скобки и используя условие равенства нулю произведения, решить уравнения, конечно, учитывая ОДЗ.

**5 тип**.

1) $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$

2) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$

3) $3x^2+\sqrt{x^2+5+3x}=\sqrt{5}-9x$

*Метод решения:* введение новой переменной.

**6 тип**.

1) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$

2) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$

*Метод решения:* выделение полного квадрата в подкоренном выражении.

**7 тип**.

$\sqrt{2x+3}+\sqrt{4x+1}=4$

*Метод решения:* возведение в квадрат, учитывая ОДЗ.

**8 тип**.

$\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$

*Метод решения:* возведение в квадрат, учитывая, что правая часть неотрицательна.

**9 тип**.

1) $\sqrt[3]{x-7}+\sqrt[3]{x+1}=2$

2) $\sqrt[3]{15+2x}+\sqrt[3]{13-2x}=4$

*Метод решения:* введение новой переменной или применение формулы сокращенного умножения.

**10 тип**.

$(\sqrt{x+1}+1)\cdot(\sqrt{x+10}-4)=x$

*Метод решения:* иррациональное уравнение можно упростить, умножив обе части уравнения на некоторое не обращающееся в нуль сопряженное выражение.

**11 тип**.

$10x^2 - 2x - 1 - 3x\sqrt{2x+1} = 0$

*<u>Метод решения:</u>* делим данное уравнение на $x^2 \neq 0$, т.к. $x = 0$ не является корнем данного уравнения, затем введем новую переменную.

**12 тип**.

$\sqrt{2x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$

*<u>Метод решения:</u>* подкоренное выражение разлагаем на множители, причем один из множителей у них общий.

**13 тип**.

$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$

*<u>Метод решения:</u>* метод оценки.

*III. Решение задач из части С по книге «Единый государственный экзамен»*

Решим следующие уравнения.

$C_{17}$. $x - 2 = (\sqrt{x+2} + 2) \cdot (\sqrt{2x+2} - 1)$

Указание. Умножим обе части уравнения на выражение $\sqrt{x+2} - 2$, т.к. $x = 2$ не является корнем данного уравнения.

$C_{18}$. $\sqrt[4]{10 + x^2 - x} + \sqrt[4]{7 - x^2 + x} = 3$

Указание. Используем формулу

$(a+b)^4 = a^4 + b^4 + 4ab(a+b)^2 - 2a^2b^2$

$C_{29}$. $\dfrac{\sqrt{3+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{3+x} - \sqrt{1-x}} = \dfrac{2}{x+1}$

Указание. Умножим числитель и знаменатель левой части на $\sqrt{3+x} + \sqrt{1-x}$.

$C_{58}$. $\dfrac{x^2 + 30x + 97}{x+7} = 8\sqrt{x+3}$

Указание. Привести уравнение к виду:

$((x+7) - 4\sqrt{x+3})^2 = 0$

*V. Подведение итогов: выставление оценок, домашнее задание.*

**Использованная литература:**

1. Ё.Юсупав. Высшая математика. Методическое пособие. ТУИТ ФФ., 2012.

2. Ботирова, Н. (2020). Обучающие возможности тестовых технологий. *Профессиональное образование и общество*, (3), 68-71.

3. Ботирова, Н. Д. (2019). РАЗВИТИЮ ПРОДУКТИВНОГО МЫШЛЕНИЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ. *Гуманитарный трактат*, (61), 4-6.