УДК 517.3

Керимова Д.

Kerimowa D.

Студентка 4 курса направление «Математика»

ФГБОУ ВО «Калмыцкий государственный университет

им. Б.Б.Городовикова

НЕКОТОРЫЕ АНАЛОГИИ В ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

On some analogies in the theory of analytic and harmonic functions

Аннотация: *Аналогия - это передача знаний на более высокий уровень, основанная на создании общих характеристик или взаимосвязей этих вещей. Использование аналогии связано с трансформацией идей, с умственными переживаниями, то есть с независимым расширением и углублением существующих знаний.*

Цель работы состоит в выявлении аналогии в теории аналитических и гармонических функций.

Abstract: *Analogy is the transfer of knowledge to a higher level based on the creation of common characteristics or interrelationships between these things. The use of analogy is associated with the transformation of ideas, with mental experiences, that is, with the independent expansion and deepening of existing knowledge.*

The purpose of the work is to identify analogies in the theory of analytic and harmonic functions.

Ключевые слова*: аналогия, интеграл, функция, предел, число, функционал, множество, пространства.*

Keywords: *analogy, integral, function, limit, the number, functionality and plenty of space.*

Интеграл Пуассона и формула Щварца.

Укажем аналогию между гармоническими и аналитическими функциями.

Пользуясь связью гармонических функций с аналитическими, можно вывести аналогичные свойства гармонических функций из уже известных свойств аналитических функций.

Пусть $u(x,y)$ - однозначная функция, гармоническая в некотором круге:$K\colon |z-z_0|<R$. Тогда в круге К существует однозначная гармоническая функция $v(x,y)$, сопряженная с $u(x,y)$. Теперь образуем соответствующую аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ и разложим ее в ряд по степеням $(z-z_0)$:

$f(z)=\sum_0^\infty(\alpha_n+i\beta_n)(z-z_0)^n,$ где $\alpha_n,\beta_n\in R$. (1)

Введем полярные координаты r и θ с полюсом в точке z_0, так что

$z=z_0+re^{i\theta}$ и обозначим $u(x,y)$ через $u(r,\theta)$, а $v(x,y)$ через $v(r,\theta)$ в качестве разнозначащих функций. Отделяя мнимые и действительные части, получим ряды:

$$u(r,\theta)=\alpha_0+\sum_1^\infty(\alpha_n cos\, n\theta-\beta_n\sin n\theta)r^n, \quad (2)$$

$$v(r,\theta)=\beta_0+\sum_1^\infty(\beta_n cosn\theta+\alpha_n\sin n\theta)r^n. \quad (3)$$

Равномерно сходящиеся внутри К.

Таким образом, каждая функция $u(r,\theta)$, гармоническая внутри круга $|z-z_0|<R$, допускает в нем разложение вида (2), равномерно сходящееся внутри этого круга, где α_n и $\beta_n \epsilon R$. Так как степенной ряд (1) сходится в данном круге и возможно имеет радиус сходимости больше чем R, то число это должно удовлетворять неравенству:

$$R\le\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\alpha_n+\beta_n|}}.$$

Если α_n и β_n - заданные числа, удовлетворяющие последнему неравенству, то ряд (2) определяет функцию, гармоническую внутри круга К. Наличие разложения вида (2) или (3) с соответствующим неравенством, наложенным на коэффициенты ряда, является характеристическим признаком функций гармонических внутри данного круга.

Применим разложение (2) или (3) к гармоническим функциям на примере функции $f(z) = \frac{\rho e^{i\alpha}+(z-z_0)}{\rho e^{i\alpha}-(z-z_0)}$.

Так как для функции $f(z) = \frac{\rho e^{i\alpha}+(z-z_0)}{\rho e^{i\alpha}-(z-z_0)}$ разложение в круге $|z - z_0| < \rho$ примет вид:

$$\frac{\rho e^{i\alpha} + (z - z_0)}{\rho e^{i\alpha} - (z - z_0)} = -1 + \frac{2\rho e^{i\alpha}}{\rho^{i\alpha}(z - z_0)} = -1 + 2\left[1 + \frac{z - z_0}{\rho e^{i\alpha}} + \frac{(z - z_0)^2}{\rho^2 e^{2i\alpha}} + \cdots\right]$$

$$= -1 + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{\rho^n} e^{-in\alpha}.$$

то

$$\mathrm{Re}[f(z)] = \frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)} = 1 + 2\sum_1^\infty \frac{r^n}{\rho^n}\cos(\theta - \alpha), \qquad (4)$$

$$\mathrm{Im}[f(z)] = \frac{2r\rho\sin(\theta-\alpha)}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)} = 2\sum_1^\infty \frac{r^n}{\rho^n}\sin n(\theta - \alpha). \qquad (5)$$

Причем оба ряда равномерно сходятся внутри круга $|z - z_0| < \rho$. Возвращаясь к рядам (2) и (3), перепишем первый из них, заменив r через произвольное $\rho(\rho < R)$ и - через α, затем умножим обе части на $\cos m\alpha$ и проинтегрируем (при фиксированном ρ) по α в пределах от 0 до 2π. Получим $\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha)\cos\alpha\, d\alpha = \alpha_m \rho^m \int_0^{2\pi} cos^2\, m\alpha d\alpha$.

Откуда $\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha) d\alpha$ и

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha)\cos m\alpha d\alpha\ , m \geq 1. \qquad (6)$$

Аналогично, умножая на $\sin m\alpha$ и интегрируя в тех же пределах найдем:

$$-\beta_m = \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha)\sin m\alpha d\alpha\ , \quad m \geq 1. \qquad (7)$$

Поставляя найденные выражения для α_nи β_n в ряды (3.2) и (3.3) будем иметь

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha)d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty u(\rho, \alpha)\cos m(\theta + \alpha)d\alpha * \frac{r^m}{\rho^m},$$

$$v(r,\theta)=\beta_0+\sum_1^\infty \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\pi)\sin m(\theta-\alpha)d\alpha * \frac{r^m}{\rho^m}.$$

Пусть ρ такое, что $r<\rho<R$. Очевидно, последние выражения могут быть получены из формул (4) и (5) путем умножения на $\frac{1}{2\pi}u(\rho,\alpha)$ и полученного интегрирования по α в пределах от 0 до 2π (при фиксированных r и ρ). Все эти операции законны в силу равномерной сходимости рядов (4) и (5) внутри круга $|z-z_0|<\rho$. Итак получим:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\alpha)\left[1+2\sum_1^\infty \frac{r^n}{\rho^n}\cos n(\theta,\alpha)\right]d\alpha$$

$$=u(r,\theta)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\alpha)d\alpha\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta,\alpha)}d\alpha, \qquad (8)$$

$$v(r,\theta)=\beta_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\alpha)\left[2\sum_1^\infty \frac{r^n}{\rho^n}\sin n(\theta,\alpha)\right]d\alpha=\beta_0$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\alpha)\frac{2r\rho\sin(\theta,\alpha)}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta,\alpha)}d\alpha. \qquad (9)$$

Таким образом, для функции $u(r,\theta)$и сопряженной с ней функции $v(r,\theta)$ выявлены интегральные представления через значения $u(r,\alpha)$ в точках окружности $|z-z_0|<\rho$ $(<R)$.

Различия интегралов в (8) и (9) объясняются тем, что во второй из них гармоническая функция $v(r,\theta)$ выражается не через свои собственные значения на окружности $|z-z_0|<\rho$, а через значения сопряженной с ней функции. Однако формула (8), установленная для любой гармонической в данном круге функции, справедлива также и для $v(x,y)$. Поэтому для $v(r,\theta)$ имеем формулу, аналогичную формуле для $u(r,\theta)$:

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\rho,\alpha)\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta,\alpha)}d\alpha\,. \qquad (10)$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (8) или (10) называется **интегралом Пуассона** соответствующий функции $u(\rho,\alpha)$ или $v(\rho,\alpha)$, гармоническая функция $\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta,\alpha)} = Re\left[\frac{\rho e^{i\alpha}+(z-z_0)}{\rho e^{i\alpha}-(z-z_0)}\right]$- **ядром интеграла Пуассона.**

По формуле (3) $u(r,\theta)\equiv 1$, получим:

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta,\alpha)}d\alpha. \qquad (11)$$

Если $\varphi(\alpha)$ - действительная функция, определенная и непрерывная на сегменте $[0;2\pi]$, то интегралом Пуассона называется выражение вида:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta,\alpha)}d\alpha. \qquad (12)$$

Не требуя, чтобы функция $\varphi(\alpha)$ совпадала со значениями некоторой гармонической функции $u(\rho,\alpha)$ (12) представляет гармоническую функцию в круге $|z-z_0|<\rho$, которая при приближении точки (r,θ) к какой- либо точке (ρ,α) стремится к пределу, равному $\varphi(\alpha)$. Интеграл Пуассона аналогичен интегралу Коши, распространенному на окружность, и может быть получен некоторыми преобразованиями из последнего интеграла. С этой целью рассмотрим наряду с формулой Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-z_0|=\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z^*}d\xi\ , \qquad (13)$$

где точка z лежит внутри окружности $|\xi-z_0|=\rho$, интеграл Коши, полученный путем замены z точкой $z^*=z_0+\frac{\rho^2}{\bar{z}-\overline{z_0}}$, симметричной с z относительно окружности $|\xi-z_0|=\rho$. Так как точка z^* лежит вне окружности, то этот интеграл должен равняться нулю:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-z_0|=\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z^*}d\xi. \qquad (13^*)$$

Вычтем почленно (13*) и (13) и преобразуем результат, воспользовавшись тем, что:

$$\xi-z=\xi-z_0-(z-z_0)=\rho e^{i\alpha}-re^{i\theta}\ ,$$

$$\xi-z^*=\xi-z_0-(z^*-z_0)=\rho e^{i\alpha}-\frac{\rho^2}{r}e^{i\theta}\ ,$$

$$d\xi = i\rho e^{i\alpha} d\alpha\,.$$

Найдем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho} f(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z^*} \right) \mathrm{d}\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\xi) \left[\frac{\rho}{\rho - re^{i(\theta-\alpha)}} + \frac{re^{i(\alpha-\theta)}}{\rho - re^{i(\alpha-\theta)}} \right] \mathrm{d}\alpha =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\xi) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\alpha - \theta)} \mathrm{d}\alpha\,. \qquad (14)$$

Получили таким образом **интегральную формулу Пуассона** для аналитической функции $f(z)$. Заменяя здесь $f(z)$ на $u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, а $f(\xi)$ на $u(\rho,\alpha) + iv(\rho,\alpha)$ и отделяя действительные и мнимые части, вновь получаться формулы (3) и (5).

Из формул (8) и (9) легко выводится важная формула, выражающая аналитическую функцию $f(z)$ через значения ее действительной части на окружности. А именно умножая (9) на i и складывая с (8) получится:

$$f(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\rho,\alpha) \left[\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)} \right.$$
$$\left. + i \frac{2\rho r \sin(\theta - \alpha)}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)} \right] d\alpha.$$

Но выражения в квадратных скобках представляют собой аналитическую функцию от z: $\frac{\rho e^{i\alpha} + (z - z_0)}{\rho e^{i\alpha} - (z - z_0)}$, поэтому

$$f(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho,\alpha) \frac{\rho e^{i\alpha} + (z - z_0)}{\rho e^{i\alpha} - (z - z_0)} d\alpha\,. \qquad (15)$$

Формула (15) носит название **формулы Шварца.**

Здесь $i\beta_0$- чисто мнимая постоянная, представляющая мнимую часть значения $f(z_0)$; эта постоянная не может быть определена по действительной части функции $f(z)$.

Из формулы (8) при $r = 0$, то есть для центра круга $K = \{z\colon |z - z_0| < R\}$

где $u(\rho,\alpha)$ обозначает функцию $u(x,y)$ в точках окружности $|z-z_0|=\rho$ с центром в точке $z_0=x_0+iy_0$ при более подробной записи будем иметь:

$$u(x_0+iy_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+\rho\cos\alpha\,,y_0+\rho\sin\alpha)d\alpha\,. \quad (16)$$

Следовательно, значение гармонической функции в центре окружности равно среднему значению ее значений по окружности с центром в этой точке. Эта особенность является функцией признаком особенностей гармонических функций, точнее, следующее утверждение является правильным:

Утверждение: *пусть* $u(x,y)$- *действительная функция, однозначная и непрерывная в области G. Если для каждой точки* $z_0=x_0+iy_0\in G$ *существует окрестность* $|z-z_0|<\delta(z_0)$, *в которой* $u(x_0+iy_0)$ *равна среднему арифметическому своих значений по любой окружности* $|z-z_0|=\rho, 0<\rho<\delta(z_0)$ *,то* $u(x+y)$ *является гармонической функцией в области G.*

Кроме того, гармонические функции, а также аналитические функции:

1) разлагаются в степенной ряд по степеням $|z-z_0|$;
2) бесконечно дифференцируемы;
3) Значения гармонических и аналитических функций равны среднему значению их значений на окружности с центром в этой точке.

Литература

1. Зорич В.А. Математический анализ ,ч.1. – М.: Наука, 1981; Ч.2. – М.: Наука 1984.
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т.1, 2. - М.: Высшая школа, 1989.
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, т.1, 2. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, т.1, 2. – любое издание.
5. А.П. Юшкевич. История математики. Т.3. - 1972, 496с.
6. Рыбников К.А. История математики. т.2 - 1963, 336с.
7. Горбачева, Н.В. Метод аналогии как средство развития творческого мышления учащихся при обучении их элементам сферической геометрии: Горбачева Наталья Владимировна. – М., 2001.