

УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки,

университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.

E-Mail: [nguyenvanquynh@hau.edu.vn](mailto:nguyenvanquynh@hau.edu.vn).

До Тхи Ми Линь

Магистр математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки, университет Ханой

промышленности, Ha Noi, Вьетнам.

E-Mail: [do.linh@hau.edu.vn](mailto:do.linh@hau.edu.vn).

## ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ АЗАРИНА

**Аннотация:** Теория функций играет важную роль в теории субгармонических и  $\delta$ -субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина теоремы об компактном множестве в пространстве радоновых мер. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.

**Ключевые слова:** мера Хана, мера Жордана, сингулярная положительная мера, линейный непрерывный функционал, радоновая мера .

Nguyen Van Quynh.

PhD in Physics and Mathematics, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam

E-Mail: [nguyenvanquynh@hau.edu.vn](mailto:nguyenvanquynh@hau.edu.vn).

Do Thi My Linh.

Master of Mathematical Sciences, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam.

E-Mail: [do.linh@hau.edu.vn](mailto:do.linh@hau.edu.vn).

## BASIC PROPERTIES OF AZARIN'S LIMIT FUNCTIONS

**Abstract:** *Theory of functions plays an important role in the theory of subharmonic and  $\delta$ -subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the article we sharpen Azarin's variant of the theorem on a compact set in the space of Radon measures. The results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.*

**Key words:** *Hahn measure, Jordan measure, singular positive measure, linear continuous functional; Radon measures, compact set.*

Уточнённый порядок играет важную роль в теории роста субгармонических функции, в ряде других разделов математики.

Абсолютно непрерывная функция  $\rho(r)$  на полуоси  $(0, \infty)$  называется уточнённым порядком, если выполняются следующие два условия :

- 1) существует предел  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho(\infty) = \rho \in (-\infty, \infty)$ ,
- 2)  $\lim_{r \rightarrow +\infty} r \ln r \rho'(r) = 0$ .

В приложениях чаще всего используется не сам уточнённый порядок  $\rho(r)$ , а функция  $V(r) = r^{\rho(r)}$ . Отметим следующее свойство уточнённого порядка.

**Теорема 1.** для любого  $t > 0$  существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(tr)}{V(r)} = t^\rho,$$

и этот предел равномерный на любом сегменте  $[a, b] \subset (0, \infty)$ .

Если  $\rho(r)$  – уточнённый порядок, то существует дифференцируемый, и даже аналитический, уточнённый порядок  $\rho_1(r)$  такой, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{V_1(r)} = 1,$$

где  $V_1(r) = r^{\rho_1(r)}$ .

Поэтому предположение о дифференцируемости уточнённого порядка часто не ограничивает общности рассуждений. В дальнейшем мы будем предполагать, что функция  $\rho(r)$  является непрерывно дифференцируемой на полуоси  $(0, \infty)$ .

Рост произвольной функции  $f(r)$  сравнивается с ростом функции вида  $V(r)$ .

Множество функций вида  $V(r)$  – это более широкое множество, чем множество степеней  $r^\alpha$ ,  $\alpha \in (-\infty, \infty)$ , или множество функций вида  $r^{\alpha_0} (\ln r)^{\alpha_1} (\ln_2 r)^{\alpha_2} \dots (\ln_k r)^{\alpha_k}$ , где  $\alpha_m$  – вещественные числа, а  $\ln_m r$  – это  $m$ -тая итерация логарифма. Например,  $\ln_2 r = \ln \ln r$ .

Пусть  $f(r)$  – положительная функция на полуоси  $(0, \infty)$ . Порядком функции  $f$  называется число

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln f(r)}{\ln r}.$$

Важность понятия уточнённого порядка в теории роста функций можно усмотреть из следующей теоремы.

Положительная на полуоси  $(0, \infty)$  функция  $f(r)$  называется регулярно меняющейся в смысле Караматы, если для любого  $\lambda > 0$  существует конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda r)}{f(r)}.$$

Пусть  $\rho(t)$  – некоторый уточнённый порядок. На пространстве  $R_C$  определяется одно-параметрическое семейство преобразований Азарина  $A_t: R_C \rightarrow R_C$ ,  $t \in (0, \infty)$ , согласно формулам

$$\mu_t = A_t \mu, \mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V(t)},$$

Для любого борелевского множества  $E$ .

Пусть  $\varphi \in \Phi(R_0^n)$ . Формула переменных даёт

$$\int_{R_0^n} \varphi(x) d\mu_t(x) = \frac{1}{V(t)} \int_{R_0^n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) d\mu(t). \quad (4.1)$$

В этом разделе излагаются технические результаты, которые используются в следующем разделе.

Мы начнём с построения и оценок исключительного множества для меры.

Пусть  $\rho(r)$  – уточнённый порядок,  $\mu$  – положительная мера на  $R_0^n$ ,  $\eta$  – фиксированное строго положительное число. Обозначим через  $E_\eta$  множество тех точек,  $\|x\| \geq 2$ , для которых существует число  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$  такое, что

$\mu \dot{c}$

Множество  $E_\eta$  мы будем называть исключительным для меры  $\mu$ . Это название оправдывается тем, что при  $x \notin E_\eta, x \neq 0$ , и  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$  выполняется неравенство

$$\mu \dot{\leq}$$

Покажем, что для каждого  $x \in E_\eta$  существует наибольшее из чисел  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ , для которого выполняется неравенство (5.1). Пусть  $A(x) = \{\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \text{ для которых выполняется неравенство (5.1)}\}$ , тогда существует последовательность  $\beta_m$  такая, что  $\beta_m \in (0, \alpha_x] \cap A(x)$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = \alpha_x$ . Имеем

$$\mu \dot{\leq}$$

Это означает, что  $\alpha_x \in A(x)$  и нужное нам утверждение доказано.

**Теорема.** Пусть  $v_n(x)$  — последовательность субгармонических функций в области  $G \subset R^m$ , которая сходится как последовательность обобщенных функций к обобщенной функции  $w$ . Тогда

1) обобщенная функция  $w$  является регулярной обобщенной функцией, которая представляется субгармонической функцией  $w(x)$  в области  $G$ ;

2) если  $\mu$  — риссовская мера  $w$ , а  $\mu_n$  — риссовская мера  $v_n$ , то  $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ ;

3) справедлив принцип повышения: т.е. если  $x_n \rightarrow x \in G (n \rightarrow \infty)$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n(x_n) \leq \int w(x);$$

4) множество точек  $x \in G$ , для которых выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n(x_n) < \int w(x),$$

имеет емкость нуль;

5) для любой точки  $x \in G$  выполняется равенство

$$\dot{\leq}$$

6) если  $\beta$  — положительная конечная финитная борелевская мера в  $G$  такая, что функция  $b(y) = \int h_m(x-y) d\beta(x)$  непрерывна, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n(x) d\beta(x) = \int w(x) d\beta(x);$$

7) если  $\gamma$  — положительная конечная финитная борелевская мера в  $G$  такая, что функция  $h_m(x-y): R^m \rightarrow L_p(\gamma)$  является равномерно непрерывной, то

$$\int |v_n(x) - w(x)|^p d\gamma(x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

**Доказательство.** Пусть  $\mu_n$  — риссовская мера  $v_n$ . Функция  $v_n$  и его риссовская мера  $\mu_n$  связаны соотношением

$$d\mu_n(x) = \Delta v_n(y) dy.$$

Так как операция дифференцирования непрерывна из  $D'$  в  $D'$ , то последовательность  $\mu_n \dot{\tau}_1$  сходится. Как известно, что  $D$  всюду плотное в пространстве  $\Phi$ . Поэтому последовательность  $\mu_n \dot{\tau}$  сходится.. Пусть

$$\mu = \dot{\tau} \lim \mu_n, \bar{\mu} = \dot{\tau} \lim |\mu_n| (n \rightarrow \infty).$$

Пусть компакт  $K \subset G$  таков, что мера  $\bar{\mu}$  не нагружает границу  $\partial K$ . Тогда из теоремы 4 следует, что

$$\mu_K = w \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_n)_K, \quad (1)$$

где индекс  $K$  означает, что берётся ограничение соответствующей меры на компакт  $K$ . В компакте  $K$  справедливо представление

$$v_n(x) = \int_K h_m(x-y) d\mu_n(y) + u_n(x), \quad (2)$$

где  $u_m(x)$  – гармоническая функция во внутренности  $\overset{\circ}{K}$  компакта  $K$ . Пусть  $a(x)$  – финитная в области  $\overset{\circ}{K}$  бесконечно дифференцируемая функция. Умножим равенство (6) на  $a(x)$  и проинтегрируем его. Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int v_n(x) a(x) dx = \int b_1(x) d(\mu_n)_R(x) + \int u_n(x) a(x) dx, \quad (3)$$

где

$$b_1(x) = \int h_m(x-y) a(y) dy.$$

По теореме 8 функция  $b_1(x)$  непрерывна в  $R^m$  и, в частности, в компакте  $K$ . Теперь из (1) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int b_1(x) d(\mu_n)_R(x) = \int b_1(x) d(\mu)_K(x).$$

По условию теоремы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n(x) a(x) dx = (w, a(x)).$$

Тем самым доказано, что для любой функции  $a(x)$  из  $D(\overset{\circ}{K})$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n(x) a(x) dx.$$

По теореме 6 существует гармоническая в шаре  $\overset{\circ}{K}$  функция  $u(x)$  такая, что последовательность  $u_n(x)$  равномерно сходится к  $u(x)$  на любом компакте  $K_1 \subset \overset{\circ}{K}$ .

Переходя к пределу в неравенстве (3), получаем

$$(w, a(x)) = \int b_1(x) d\mu_K(x) + \int u(x) a(x) dx = \int_K \left( \int h_m(x-y) d\mu_K(y) + u(x) \right) a(x) dx \\ \stackrel{\circ}{=} \int_K \left( \int h_m(x-y) d\mu(y) + u(x) \right) a(x) dx.$$

В качестве  $K$  можно брать любой компактакой, что мера  $\mu$  не нагружает границу  $\partial K$ . Из этого следует, что  $w$  есть регулярная обобщенная функция, которая представляется субгармонической функцией в области  $G$ . Утверждение 1) теоремы доказано.

Из доказательства утверждения 1) теоремы следует, что риссовская мера функции  $w$  – это есть  $\mu$ , и тем самым утверждение 2) теоремы доказано.

Теперь утверждение 3) – 5) теоремы следуют из хорошо известных фактов теории потенциала. Так, утверждение 3) есть следствие теоремы 1.3 из [6]. Утверждение 4) есть следствие теоремы 3.8 из [6], утверждение 5) следует из замечания 2 к теореме 3.8 из [6].

Докажем утверждение 6). Пусть в равенстве (2) компакт  $K$  таков, что  $\text{supp } \beta \subset K_1, K_1 \subset K$ .

Интегрируя равенство (2) по мере  $\beta$ , получаем

$$\int v_n(x) d\beta(x) = \int b(x) d(\mu_n)_K(x) + \int u_n(x) d\beta(x),$$

где

$$b(x) = \int h_m(x-y) d\beta(y).$$

Проведенное изменение порядка интегрирования законно, потому что ядро  $h_m(x-y)$  знакопостоянно и теорему Фубини можно применить к мере  $(\mu_n)_K$ . Так как  $b(x)$  — непрерывная функция, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n(x) d\beta(x) = \int b(y) d(\mu)_K(y) + \int u(x) d\beta(x)$$

$$\int \left( \int_K h_m(x-y) d\mu_R(y) + u(x) \right) d\beta(x) = \int w(x) d\beta(x).$$

Утверждение б) доказано.

Докажем теперь утверждение 7). Пусть

$$J_n = \left( \int |v_n(x) - w(x)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

и пусть  $n_k$  — такая последовательность, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \lim_{k \rightarrow \infty} J_{n_k}.$$

Пусть число  $R$  таково, что  $\text{supp } \gamma \subset K$  и что  $\bar{\mu}(\partial K) = 0$ . Тогда, применяя неравенство Минковского, получаем

$$J_{n_k} \leq \left( \int \left| \int h_m(x-y) d((\mu_{n_k})_K - \mu_K)(y) \right|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int |u_{n_k}(z) - u(x)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} = J_{1k} + J_{2k}.$$

Очевидно, что  $J_{2k} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ . Пусть  $p > 1$ . Для  $J_{1k}$  справедлива формула

$$J_{1k} = \|s\|_q \leq \left| \int s(x) \int h_m(x-y) d((\mu_{n_k})_K - \mu_K)(y) d\gamma(z) \right|,$$

где  $q$  определяется из неравенства  $1/p + 1/q = 1$ , а норма вычисляется в пространстве  $L_q(\gamma)$ . Как будет видно из дальнейшего,

$$s(x) h_m(x-y) \in L_1(R^{2m}, (|(\mu_{n_k})_K| + |\mu_K|) \times \gamma) \quad (4)$$

Поэтому в последнем интеграле возможна перестановка порядка интегрирования. После перестановки получаем

$$J_{1k} = \|s\|_q \leq \left| \int \left( \int s(x) h_m(x-y) d\gamma(x) \right) d((\mu_{n_k})_K - \mu_K)(y) \right|.$$

Из неравенства Гёльдера и замечания к теореме 9 следует, что

$$\left| \int s(x) h_m(x-y) d\gamma(x) \right| \leq \left( \int |h_m(x-y)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq M_1.$$

Заметим, что сформулированное ранее утверждение (4) теперь очевидно.

Далее покажем, что семейство функций

$$F_s(y) = \int s(x) h_m(x-y) d\gamma(x), \|s\|_q \leq 1,$$

является компактным в пространстве  $C(K)$ . Мы уже доказали равномерную ограниченность этого семейства. Неравенство Гёльдера дает

$$|F_s(y_2) - F_s(y_1)| \leq \psi(y_2, y_1).$$

Теперь из ограничений п. 7) теоремы следует, что семейство функций  $F_s(y)$  равномерно непрерывно. По теореме Арцела семейство  $F_s(y)$  компактно. Далее теорема 5) дает  $J_{1k} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ .

Мы рассмотрели случай  $p > 1$ . Пусть теперь  $p = 1$ . Тогда

$$J_{1k} = \int \left( \int s_k(x) h_m(x-y) d\gamma(x) \right) d((\mu_{n_k})_K - \mu_K)(y),$$

где

$$s_k(x) = \text{sign} \int h_m(x-y) d((\mu_{n_k})_K - \mu_K)(y).$$

Последовательность

$$F_k(y) = \int s_k(x) h_m(x-y) d\gamma(x)$$

является компактной в  $C(K)$ . Так же как и ранее, получаем, что  $J_{1k} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ . Поэтому  $J_m \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$ . Утверждение 7) и, следовательно, вся теорема доказаны.

### *Список литературы*

1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.
2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom, Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.
5. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON A COMPACT SET IN THE SPACE OF RADON MEASURES "Мировая наука" №11 (56) 2021.