УДК 510.3

Маришина А. А.,
Бугай Н. Р.
студенты
факультет «Физико-математический»
Воронежский государственный педагогический университет,
г.Воронеж

ГЛАВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Аннотация. Предлагаются замечания и комментарии к доказательствам теорем Кантора по теории множеств и новый алгоритм сравнения мощности множества всех чисел.

Ключевые слова: теория множеств, теоремы Кантора.

Marishina A. A.,
Bugai N. R.
students,
faculty of Physics and mathematics»
Voronezh state pedagogical University, Voronezh

MAIN PROBLEMS OF THE THEORY OF SETS

Abstract. Remarks and comments to proofs of Cantor theorems of the theory of sets and new algorithm of comparison of power of all numbers are offered.

Keywords: theory of sets, Cantor theorems.

Как сосчитать все элементы множества и внести в общий список?

Как найти место в таком списке тому субъекту, кто не очень точно помнит свой номер в этом списке? «Знал, но забыл!».

Многие старались разобраться с такими проблемами. Для чисел придумали упорядоченные множества. Например, натуральные числа. Каждое следующее число на единицу больше предыдущего. А с их помощью можно распределить, пересчитать и переписать всех, кто попался на глаза для учёта. Поставить их в однозначное соответствие.

Если множество содержит конечное число элементов, то все очень просто. Номера в гостинице или кресла в театральном зале, кровати в солдатской спальне или в больничной палате и прочее.

Для бесконечных множеств нужно главное: придумать правило или порядок следования. А затем организовать процесс.

Да, конечно, такой процесс может, и он будет продолжаться бесконечно. Но все уверены, следуя Кантору, что все рациональные числа можно пересчитать и поставить им в соответствие разные натуральные числа благодаря таблице, которую он придумал. На каждом этапе своих действий мы точно знаем, сколько и каких чисел уже успели переписать и разместить в этом списке. Некоторые возражали: как это можно в общий список вносить одну вторую и две четвертых или три шестых? Это ведь одно и то же число! Нет, они равны, но это разные числа, у них разные свидетельства о рождении. Это просто близнецы, хотя им могли по какой-либо прихоти выписать паспорт на одно имя и на одно место на числовой оси.

Некоторые возражали: как можно считать счетным множество, если оно содержит повторно точно такие счетные множества, да еще так много почти одинаковых счетных множеств со своим особым коэффициентом. Им возражали другие: это хорошо, что можно переписать и пересчитать счетное множество счетных множеств. Каждое рациональное число найдет свое место в таком списке с помощью правильного порядка прохождения таблицы Кантора.

Для действительных чисел получилась неприятность. Кантор не захотел все числа переписывать в общий список и решил, что такое числовое множество бесконечное и несчетное.

Даже придумал «противный» пример. Сначала предположил, что такой список существует, а затем нашел такое действительное число, которого нет в этом списке. Кантор решил: если есть одно такое число, которое отсутствует в списке, то значит таких же чисел еще очень много. Так много, что никто не может такие числа сосчитать. Даже придумали специальное название: мощность континуума. Решили, что действительные числа, если их отмечать точками на числовой оси, заполняют непрерывно отрезок [0, 1] и далее всю прямую, так как между любыми двумя числами можно найти другие действительные числа, которые отличаются хотя бы одной цифрой на каком-либо месте в бесконечной записи десятичной дроби.

Это утверждение не всегда справедливо. Требуется, чтобы разность этих двух чисел была отлична от нуля существенным образом. Например, два разных числа 0,5(0) и 0,4(9) отличаются каждой цифрой после запятой в записи бесконечной десятичной дроби (ноль и девять в периоде), но это отличие не может проявиться цифрой на каком-либо конечном месте, если запись дроби не ограничили при использовании в процессе вычислений. Числа так близки друг другу, что их можно считать или изображать как одно и тоже рациональное число «одна вторая».

Но главное противоречие здесь другое. Сначала говорят, что такой бесконечный список для чисел есть, но никому его не показывают. Потом формируют такое число, которое отличается хотя бы одной цифрой от тех, что в списке: у первого другая первая цифра, у второго — вторая и так далее. Это как если особый контроль на входе требуют показать приглашение и видит там другие буквы, а потом говорят, что оно на другой праздник или на другое время. Скажем, гостя спрашивают: фамилия начинается на «а»? Нет? Тогда идите дальше, в нашей части списка вас нет, в эту дверь вас не пропустят. На другом входе его спрашивают про вторую букву фамилии, а затем посылают дальше. Вот и ходит бедный родственник до сих пор, ищет правильную дверь и никак не может до нее добраться. Нельзя таких запускать! Это все не наши родственники! Другие в это время празднуют что-то. А для числа проверяют каждый раз только одну цифру, сравнивая только с одним конкретным числом из списка.

Были ученые, которые возражали Кантору. Теория множеств Кантора многими современниками была воспринята настолько нелогичной, парадоксальной и шокирующей, что натолкнулась на резкую критику. В том числе Пуанкаре спрашивал: «Почему мощность континуума не такая же, как и мощность целых чисел?». Далее говорится: «Всякая теорема математики должна быть доступна проверке. Если дело обстоит иначе, то эта теорема недоказуема, а если она недоказуема, то она не будет иметь смысла. Следовательно, нельзя найти очевидные аксиомы, относящиеся к бесконечным числам, всякое свойство бесконечных чисел есть лишь перевод какого-либо свойства конечных чисел. Именно это может быть очевидным.»

Но многие поверили тем математикам, кто поддерживал Кантора, его друзьям и сторонникам (Адамар, Бендиксон, Бернштейн, Гильберт, Гурвиц, Рассел, Цермело и другие). Им было удобнее считать, что не всех можно пересчитать и переписать. Действительных чисел так много, как казалось им, что следует вводить новую категорию мощности множеств.

Были попытки сравнить натуральные, рациональные и действительные числа, чтобы определить, каких чисел «больше» – конечных и периодических десятичных дробей (для записи рациональных чисел) или произвольных действительных чисел, которые представляются бесконечной десятичной непериодической дробью. Это возвращение к проблеме, которую многие считали давно решенной, хотя пожелания получить новые доказательства или опровержения теории множеств Кантора продолжаются. В свою очередь предлагается новый алгоритм, который позволит сравнивать мощность всех чисел или переписать их в один список.

Выбираем из множества всех действительных чисел, отмеченных на отрезке [0, 1], любые десять случайным образом такие числа ak, которые начинаются после запятой соответственно цифрами от 0 до 9. Присвоим этим числам номера k от 1 до 10. На следующем шаге нам нужно выбрать числа, которые на втором месте после запятой имеют числа от 0 до 9. Но сделать это нужно для каждого предыдущего числа. Какая-то вторая цифра уже была. Таким образом, добавится еще девять вариантов при замене цифры на нужном месте. При этом каждое отмеченное ранее в списке число прихватывает дополнительно всех своих «близких родственников» («они все за мной занимали очередь, просто отошли на время»), сохраняя все остальные цифры.

Итого получаем на основании представленного отчета на этом шаге возможность пронумеровать первые сто чисел из нашего множества. Продолжая процедуру, будем получать на каждом шаге в десять раз больше действительных чисел, которые можно пересчитать или записать, то есть поставить им в соответствие конечное число натуральных чисел. Общее количество уже внесенных в список растет в геометрической прогрессии, но на каждом этапе это конечное число.

Продолжая так до бесконечности, мы можем перебирать все действительные числа, которые по определению представляют в виде десятичной бесконечной дроби на отрезке [0, 1]. Получаем возможность последовательно сопоставить им бесконечное число натуральных чисел. Получается сложное разветвление кустов или деревьев из первоначальных саженцев, но все листочки пронумерованы. При выборе любого числа всегда можно указать, в какой части списка или на какой «веточке» его следует искать и со временем можно найти, если очень постараться.

Использованные источники

1. Алатин С.Д. О структуре рациональных чисел // Сборник статей по материалам междунар. научно–практической конференции «Наука вчера, сегодня, завтра», № 11 – 12 (17). Новосибирск: Изд. «СибАК», 2014. – С. 6 – 12.
2. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию, М.: 1977. – 370 с.