УДК 517.275

Очирова И.В., магистрант, 2 курс
ФГБОУ ВО «КалмГУ им. Б.Б. Городовикова»
Россия, г. Элиста
Горяева С.П., магистрант, 2 курс
ФГБОУ ВО «КалмГУ им. Б.Б. Городовикова»
Россия, г. Элиста
Научный руководитель: Кочетков В.К.,
к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры и анализа
Ochirova I.V., undergraduate, 2 year
KalmSU
Russia, Elista
GoryaevaS.P., undergraduate, 2 year
KalmSU
Russia, Elista
Scientific adviser: Kochetkov V.K.,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Department of Algebra and Analysis

ОТОБРАЖЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ МНОГОУГОЛЬНИКАМИ.

Аннотация: *в данной статье рассматривается несколько случаев отображения замкнутых многоугольников без самопересечений.*

Ключевые слова: *конформное отображение, теорема Шварца – Кристоффеля, бесконечно удаленная точка.*

DISPLAYING AREAS BOUNDED BY STRAIGHT POLYGONS.

Abstract: *this article discusses several cases of displaying closed polygons without self-intersections.*

Keywords: *conformal mapping, the theorem of Schwarz – Christoffel, infinitely distant point.*

Рассмотрим отображение многоугольников. Для этого зададим на плоскости φ замкнутый n −угольник $M_1M_2 \dots M_n$ без самопересечений. Возможны несколько случаев.

1) ***Многоугольник*** $\boldsymbol{P_n = M_1M_2 \dots M_n}$ ***не содержит бесконечно удаленной точки.***

Теорема 1 (Шварца – Кристоффеля). Пусть функция $\varphi = g(z)$ конформно преобразует плоскость z^+ на ограниченный n −угольник P_n с углами при вершинах $\alpha_i\pi$, $0 < \alpha_i \le 2$, $i = \overline{1, n}$, причем известны и упорядочены точки $m_i \in IR$, соответствующие вершинам P_n. В этом случае имеет место интеграл

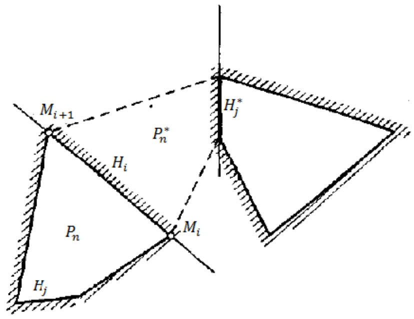
$$g(z) = C \int_{z_0}^{z} \prod_{i=1}^{n} (z - m_i)^{\alpha_i - 1}\, dz + C_1,$$

где C, C_1 − константы, а интеграл считается по кривой, лежащей в полуплоскости z^+.

Для доказательства теоремы 1 сформулируем вспомогательный материал.

Теорема 2 (Римана). Для любых V_0 и V_1 единственным образом определено отображение $\varphi = g(z)$, переводящее область V_0 на область V_1, причем $g(z_0) = \varphi_0$, $arg\, g'(z_0) = \alpha_0$, где $z_0 \in V_0$, $\varphi_0 \in V_1$, $\alpha_0 \in IR$.

Теорема 3 (Римана—Шварца) (принцип симметрии). Пусть D_1 и D_1^* − области, имеющие жордановы границы ∂D_1 и ∂D_1^*, причем ∂D^1 содержит часть прямой или дугу окружности γ, а ∂D_1^*— такую же часть или дугу γ^*. Тогда если функция f_1 реализует конформное отображение D_1, на D_1^*, при котором $f_1(\gamma) = \gamma^*$, то f_1 допускает аналитическое продолжение в симметричную с D_1 относительно γ область D_2, и продолженная таким образом функция отображает область $D_1 \cup \gamma \cup D_2$ на $D_1^* \cup \gamma \cup D_2^*$ конформно, если $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ и $D_1^* \cap D_2^* = \emptyset$.



Замечание 2. В случае, если промежуток γ^* содержит бесконечную точку, продолжение f будет мероморфным. То есть функция f окажется голоморфной в D всюду, кроме точки $z_0 \in \gamma$, соответствующей бесконечной точке, где она имеет полюс обязательно первого порядка, так как f однолистна в области D (вблизи кратного полюса функция многолистна).

Доказательство теоремы 1. По теореме Римана существует функция $\varphi = g(z)$, конформно отображающая плоскость z^+ на ограниченный многоугольник P_n, причем $m_i \neq \infty$, $i = 1,2, \ldots, n$. Такая функция имеет ряд свойств.

Пусть $G(z)$ – аналитическая функция с исходным элементом $g(z)$, $Im\, z > 0$. Покажем, что функция $G(z)$ является аналитической во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками m_i, $i = \overline{1, n}$. Функция $\varphi = g(z)$ переводит интервал $h_i = (m_i, m_{i+1})$ в интервал $H_i = (M_i, M_{i+1})$. Исходя из принципа симметрии, заключаем, что через отрезок (m_i, m_{i+1}) существует аналитическое продолжение $g^*(z)$ функции $g(z)$ в нижнюю полуплоскость $Im\, z < 0$. Функция $\varphi = g^*(z)$ конформно отображает полуплоскость $Im\, z < 0$ на многоугольник P_n^*, симметричный относительно грани $M_i M_{i+1}$ с областью P_n. При таком отображении интервал H_j^*, симметричный H_j относительно грани $M_i M_{i+1}$, является образом интервала h_j.

Предположим, что выполнены все возможные аналитические продолжения. В результате получится бесконечнозначная аналитическая во всей расширенной комплексной плоскости функция $\varphi = G(z)$ с выколотыми точками m_i, $i = \overline{1, n}$.

Теперь докажем, что функция $f(z)=\frac{g''(z)}{g'(z)}$ однозначна и регулярна во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками m_i $(i=\overline{1,n})$.

Пусть $\varphi=g^*(z)$ и $\varphi=g^{**}(z)$ – две произвольные ветви функции $G(z)$ в плоскости z^+. Тогда, из вышеизложенного, эти ветви отображают верхнюю полуплоскость конформно на два многоугольника P_n^* и P_n^{**} соответственно. Учитывая, что любая пара симметрий относительно двух произвольных прямых сводится к некоторому сдвигу и повороту, запишем функцию $g^{**}(z)$ в виде $g^{**}(z)=e^{i\alpha}g^*(z)+a,$ где $z\in z^+$, a,α –константы. Это справедливо и для ветвей в нижней полуплоскости.

Функция $f(z)=\frac{g''(z)}{g'(z)}=\frac{d}{dz}lng'(z)$ аналитична в плоскости z^+ в силу того, что $g'(z)\neq 0$ при любом z как производная функции конформного отображения. Функция $f(z)$ будет однозначной при всевозможных аналитических продолжениях $g(z)$. Следовательно, $f(z)$ однозначна во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками m_i $(i=\overline{1,n})$. Регулярность $f(z)$ в бесконечности следует из того, что $z=\infty$ переходит не в вершину многоугольника, а в некоторую точку на его стороне.

Определим вид функции $f(z)$ в точке $z=m_i$:

$$f(z)=\varphi_i+(z-m_i)^{\alpha_i}(a_0+a_1(z-m_i)+\cdots).$$

Тогда разложение Лорана функции $f(z)$ вблизи точки $z=m_i$ будет иметь вид:

$$f(z)=\frac{g''(z)}{g'(z)}=\frac{(\alpha_i-1)a_0\alpha_i(z-m_i)^{\alpha_i-2}+\cdots}{a_0\alpha_i(z-m_i)^{\alpha_i-1}+\cdots}=\frac{\alpha_i-1}{z-m_i}+a_0'+a_1'(z-m_i)+\cdots,$$

откуда видно, что точка $z=m_i$ для функции $f(z)$ является простым полюсом с вычетом α_i-1. Следовательно, $f(z)$ во всей плоскости имеет только n особых точек.

Определим функцию $F(z)$ как разность функции $f(z)$ и главных частей ее разложения в особых точках:

$$F(z) = f(z) - \frac{\alpha_1 - 1}{z - m_1} - \frac{\alpha_2 - 1}{z - m_2} - \cdots - \frac{\alpha_n - 1}{z - m_n}.$$

Полученная функция является регулярной на всей плоскости z. Так как в точке $z = \infty$ функция $f(z)$ правильна, то в ее окрестности

$$g(z) = d_0 + \frac{d_{-p}}{z^p} + \frac{d_{-p+1}}{z^{p+1}} + \cdots,$$

$$f(z) = \frac{p(p+1)\frac{d_{-p}}{z^{p+2}} + \cdots}{-\frac{pd_{-p}}{z^{p+1}} + \cdots} = -\frac{p+1}{z} + \frac{d'_{-2}}{z^2} + \cdots.$$

При $z = \infty$ получим $f(\infty) = 0$, следовательно, $F(\infty) = 0$. Тогда

$$f(z) = \frac{d}{dz} ln g'(z) = \frac{\alpha_1 - 1}{z - m_1} + \frac{\alpha_2 - 1}{z - m_2} + \cdots + \frac{\alpha_n - 1}{z - m_n}.$$

Проинтегрировав полученное выражение вдоль любого пути, лежащего в области $Im\, z > 0$, а затем потенцируя его, получим

$$g'(z) = C(z - m_1)^{\alpha_1 - 1}(z - m_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (z - m_n)^{\alpha_n - 1}.$$

Интегрируя последнее выражение, получим представление для $g(z)$

$$g(z) = C \int_{z_0}^{z} (z - m_1)^{\alpha_1 - 1}(z - m_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (z - m_n)^{\alpha_n - 1}\, dz + C_1.$$

Теорема доказана.

2) Одна из вершин многоугольника – образ бесконечно удаленной точки.

Пусть $m_n = \infty$. Введем линейное преобразование $\varepsilon = -\frac{1}{z} + m'_n$ плоскости z^+ на верхнюю полуплоскость ε, при котором точки $m_1, m_2, \ldots, m_n$ перейдут в конечные точки $m'_1, m'_2, \ldots, m'_n$. Тогда по теореме Шварца – Кристоффеля получим:

$$g(z) = C \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} (\varepsilon - m'_1)^{\alpha_1 - 1}(\varepsilon - m'_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (\varepsilon - m'_n)^{\alpha_n - 1}\, d\varepsilon + C_1 =$$

$$= C \int_{z_0}^{z} \frac{1}{z^2} \left(m'_n - m'_1 - \frac{1}{z}\right)^{\alpha_1 - 1} \left(m'_n - m'_2 - \frac{1}{z}\right)^{\alpha_2 - 1} \ldots \left(-\frac{1}{z}\right)^{\alpha_n - 1} dz + C_1 =$$

$$= C \int_{z_0}^{z} \frac{(z - m_1)^{\alpha_1 - 1}(z - m_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (z - m_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1}}{z^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - n + 2}}\, dz + C_1,$$

где $m_i = \frac{1}{m_n' - m_i'}$ – некоторые вещественные константы, а C – комплексная постоянная. С учетом формулы суммы углов n –угольника, по которой $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = n - 2$, окончательно имеем

$$\varphi = C \int_{z_0}^{z} (z - m_1)^{\alpha_1 - 1} (z - m_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - m_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} dz + C_1.$$

Из последнего выражения видно, что если одна из вершин многоугольника – образ бесконечно удаленной точки, то множитель, относящийся к этой вершине, в формуле Шварца – Кристоффеля отсутствует.

3) В бесконечно удаленной точке лежат одна или больше вершин многоугольника.

Допустим, такой вершиной является M_i. На лучах $M_i M_{i+1}$ и $M_{i-1} M_i$ отметим произвольным образом точки M_i' и M_i''. Соединяя эти точки, получим $(n+1)$ –угольник P_n^*. Функция, отображающая полуплоскость на многоугольник P_n^* выражается формулой

$$\varphi = C \int_{z_0}^{z} (z - m_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z - m_i')^{\alpha_i' - 1} (z - m_i'')^{\alpha_i'' - 1} \dots \dots (z - m_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1, \tag{1}$$

где α_i' и α_i'' – углы при вершинах M_i' и M_i'', измеренные в долях π, а m_i' и m_i'' – точки действительной оси, соответствующие этим вершинам.

Пусть отрезок $M_i' M_i''$ с помощью параллельного переноса удаляется в бесконечность так, что точки m_i' и m_i'' сливаются в одну m_i, соответствующую вершине M_i. Обозначим через $\alpha_i \pi$ угол пересечения лучей $M_{i-1} M_i$ и $M_i M_{i+1}$ в конечной точке M_i^*, взятый со знаком минус. Из треугольника $M_i' M_i'' M_i^*$ имеем $\alpha_i' + \alpha_i'' - \alpha_i = 1$, т.е. $\alpha_i' + \alpha_i'' - 2 = \alpha_i - 1$. Тогда формула (1) примет вид

$$\varphi = C \int_{z_0}^{z} (z - m_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z - m_i)^{\alpha_i - 1} \dots (z - m_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1.$$

В случае, когда в бесконечности лежат несколько вершин многоугольника, рассуждение проводится аналогично.

Использованная литература

1. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций. – Томск, 2001. с. 220.
2. Береславский Э.Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках. Журнал Дифференциальные уравнения, 1997, том 3, номер 3, 296-301с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ. –мат. лит. 1973 – 749с.