

Нгуен Тхи Хиен
Кандидат физико-математических наук,
старший преподаватель Факультета фундаментальной науки,
Ханойский индустриальный университет, Вьетнам.

ПРИБЛИЖЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ НЕКОТОРОГО ГИСТЕРЕЗИСНОГО ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

Аннотация: В данной работе исследуется приближённая математическая модель, предназначенная для описания поведения некоторого гистерезисного переключателя. Предложенная аппроксимация позволяет упростить анализ нелинейных свойств системы, сохранив при этом ключевые особенности гистерезисного механизма. На основе построенной модели демонстрируется методика получения и исследования траекторий рассматриваемой гистерезисной системы, что обеспечивает возможность более глубокого понимания её динамики и потенциальных режимов функционирования. Особое внимание уделяется применимости модели для решения практических задач, связанных с анализом и управлением систем с гистерезисным переключателем.

Ключевые слова: гистерезис, модель, приближенная, переключатель.

Nguyen Thi Hien
PhD in Physics and Mathematics, Lecturer Faculty of Basic Science,
Hanoi University of Industry, Vietnam.

AN APPROXIMATE MATHEMATICAL MODEL OF SOME HYSTERESIS SWITCH AND ITS APPLICATION

Abstract: This paper investigates an approximate mathematical model designed to describe the behavior of a certain hysteresis switch. The proposed approximation simplifies the analysis of the system's nonlinear properties while preserving the key features of the hysteresis mechanism. Based on the constructed model, a methodology for obtaining and analyzing the trajectories of the considered hysteresis system is presented, providing deeper insight into its dynamics and possible operating modes. Special attention is given to the

applicability of the model to practical problems related to the analysis and control of systems exhibiting hysteresis switches.

Keywords: hysteresis, mathematical model, approximation, switches.

1. Приближенная математическая модель

Появление математических описаний гистерезисных явлений обуславливалось достаточно богатым набором прикладных задач [1] – [5]. Гистерезисные переключатели рассматриваются как преобразователь с произвольным непрерывным входом $x(t)$ и выходом $y(t)$, имеющим два возможных значения 0 и 1, причем при $x(t) \leq \alpha$ только 0, при $x(t) \geq \beta$ только 1. 0 скачком меняется на 1 при достижении входным сигналом значения β ; 1 на 0 при достижении α . При этом α, β ($\alpha < \beta$) называются, соответственно, нижним и верхним пороговыми значениями переключателя. Таким образом, областью $\Omega(\alpha, \beta)$ допустимых состояний переключателя с пороговыми значениями α и β является множество точек (x, y) плоскости, лежащих на двух полупрямых $y = 0$ при $x < \beta$ и $y = 1$ при $x > \alpha$, при этом это описание переключателя называется феноменологическим.

Для численного анализа систем, включающих гистерезисный переключатель мы исследуем некоторую приближенную модель. Эта модель определяется с помощью дифференциального уравнения, предлагающего следующим образом

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{1}{\pi} \left[(1-y) \cdot \left| \frac{d}{dt} (\arctan(K(x(t)-\beta))) \right| - y \cdot \left| \frac{d}{dt} (\arctan(K(x(t)-\alpha))) \right| \right] \\ y_0 = y(t_0) \in \{0;1\}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь K есть большой параметр какой, что при увеличении K увеличивается точность предлагаемой модели.

Мы имеем:

$$\frac{d}{dt} (\arctan(K(x(t)-\beta))) = \frac{K\dot{x}(t)}{1+K^2(x(t)-\beta)^2} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} (\arctan(K(x(t)-\alpha))) = \frac{K\dot{x}(t)}{1+K^2(x(t)-\alpha)^2} \quad (3)$$

Легко видеть, что при больших значениях параметра K производная $\frac{d}{dt} (\arctan(K(x(t)-\beta)))$ существенно отлично от нуля только вблизи β . Поэтому первое слагаемое в задаче (1) играет роль, только когда $x(t)$

вблизи к α , а y к нулю. Аналогично, $\frac{d}{dt}(\arctan(K(x(t) - \alpha)))$ играет роль, только когда $x(t)$ близко α , а y к единице.

С помощью современных пакетов прикладных математических программ (таких как Mathematica, MATLAB, Maple) можно получать результаты численного решения системы (1).

2. Анализ гистерезисной системы

2.1. Постановка задачи

Рассматривается следующая система

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2y(t) & -\varepsilon \\ \varepsilon & 1 - 2y(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Где $u: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ есть искомая непрерывная функция; $y(t)$ есть выходной сигнал переключателя в виде приближенной модели с пороговыми значениями α, β ($0 < \alpha < \beta$) и входной функцией $x(t) = \|u(t)\| = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)}$.

Вопрос заключается в том, при каких условиях на ε система имеет периодическое решение.

2.2. Теорема о периодических решениях

Теорема: Для того, чтобы начиная с некоторого момента решение системы было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varepsilon \in E = \left\{ a \in \mathbb{R} : a = \frac{\pi}{\ln \frac{\alpha}{\beta}} m, m \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Доказательство. Сначала докажем, что существует момент $t_1 \geq t_0$, в которой решение системы пересекается с окружностью радиуса α . Если $y(t) = 1$, то общим решением первого уравнения в системе является

$$u(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos \varepsilon t & -\sin \varepsilon t \\ \sin \varepsilon t & \cos \varepsilon t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon t & -\sin \varepsilon t \\ \sin \varepsilon t & \cos \varepsilon t \end{pmatrix}.$$

При этом $\Phi(t)$ называется *фундаментальной матрицей*. Нетрудно проверить, что эта матрица обладает следующими свойствами:

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) \text{ и } \Phi(t_1) \cdot \Phi(t_2) = \Phi(t_1 + t_2).$$

В силу и получим, что решение системы является

$$u(t) = e^{-(t-t_0)} \Phi(t-t_0) u(t_0).$$

Аналогично, если $y = 0$, то решение системы вычисляется по следующей формуле:

$$u(t) = e^{t-t_0} \Phi(t-t_0) u(t_0)$$

Если $\|u_0\| > \beta$, то после этого момента переключатель включено до первого момента, в котором вход $x(t)$ достигает нижнего порогового значения α . Поэтому решение системы вычисляется по формуле и, следовательно, входная функция $x(t) = \|u(t)\| = e^{-(t-t_0)} \|u_0\|$ строго убывает со значения $\|u_0\|$ и может стремиться к 0 при $t \rightarrow +\infty$. Отсюда вытекает, что в некоторый момент t_1 эта входная функция достигает значения α и, тем самым, доказано, что решение системы в данной момент пересекается с окружностью радиуса α . Аналогично, если $\|u_0\| < \alpha$, то решение, вычисляемое по формуле, пересекается с окружностью радиуса α в некоторой момент, обозначаемый t_1 и, после этого момента оно выходит за рамки этой окружности. Если $\alpha \leq \|u_0\| \leq \beta$, то в двух случаях ($y=1$ или $y=0$) нетрудно проверить, что решение системы лежит между этими окружностями и также существует момент t_1 такой, что $\|u(t_1)\| = \alpha$. Таким образом, доказано, что начиная с некоторого момента, решение системы полностью лежит в кольце, ограниченном между окружностями радиусов α и β ; кроме этого, в некоторый момент t_1 решение пересекается с окружностью радиуса α .

Теперь мы найдем условия для ε , при которых решение будет периодическим. Видно, что после момента t_1 переключатель выключен ($y=0$) и решение вычисляется по формуле, в которой t_0 заменено на t_1 . Это решение пересекается с большой окружностью в некоторый момент t_2 и

$$u(t_2) = e^{t_2-t_1} \Phi(t_2-t_1) u(t_1),$$

следовательно, $t_2 - t_1 = \ln \frac{\beta}{\alpha}$. После момента t_2 переключатель становится включенным ($y=1$) и решение вычисляется по формуле, в которой t_0 заменено на t_2 . Кроме этого, это решение пересекается с окружностью радиуса α в некоторый момент t_3 и

$$u(t_3) = e^{-(t_3-t_2)} \Phi(t_3-t_2) u(t_2),$$

следовательно, $t_3 - t_2 = \ln \frac{\beta}{\alpha}$. Таким образом, доказано, что за время $\ln \frac{\beta}{\alpha}$ решение системы может совершить траекторию из маленькой до большой окружности или наоборот.

Введем следующие обозначения:

t_{2n} ($n \in N$) есть моменты переключения с 0 на 1 и, следовательно,

$$x(t_{2n}) = \|u(t_{2n})\| = \beta;$$

t_{2n+1} ($n \in N$) есть моменты переключения с 1 на 0 и, следовательно,

$$x(t_{2n+1}) = \|u(t_{2n+1})\| = \alpha.$$

По аналогии с , и в силу свойства функции $\Phi(t)$ получим, что

$$t_{2n+1} - t_{2n} = t_{2n} - t_{2n-1} = \dots = t_2 - t_1 = \ln \frac{\beta}{\alpha}$$

и

$$\begin{aligned} u(t_{2n+1}) &= e^{-(t_{2n+1}-t_{2n})} \Phi(t_{2n+1} - t_{2n}) u(t_{2n}) = \\ &= e^{-(t_{2n+1}-t_{2n})} \Phi(t_{2n+1} - t_{2n}) e^{t_{2n}-t_{2n-1}} \Phi(t_{2n} - t_{2n-1}) u(t_{2n-1}). \end{aligned}$$

По этой индукции нетрудно получить, что

$$u(t_{2n+1}) = \Phi\left(2n \ln \frac{\beta}{\alpha}\right) u(t_1)$$

Теперь можно утверждать, что с момента t_1 решение системы является периодическим тогда и только тогда, когда существует $n \in N$ такой, что $u(t_{2n+1}) = u(t_1)$. Отсюда и из следует, что матрица $\Phi\left(2n \ln \frac{\beta}{\alpha}\right)$ является единичной. Это эквивалентно следующему уравнению:

$$\cos\left(\varepsilon \cdot 2n \ln \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1.$$

Решив последнее уравнение, получим: $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = \frac{k\pi}{n \ln \frac{\beta}{\alpha}}$, где

$k \in Z \setminus \{0\}$. Нетрудно проверить, что начиная с некоторого момента решение о периодических решениях полностью доказана.

2.3. Эксперименты численного анализа

С помощью программы Mathematica 7.0 приведем результаты численного решения системы при некоторых значениях параметров и начальных условиях: $\alpha = 1, \beta = 3, u_0 = (1, 2), y_0 = 0, K = 10^6$.

Если возьмем $\varepsilon = \frac{2\pi}{9 \ln 3} \in E$, то полученное решение системы является периодическим и его период $T = 18 \ln 3$. Изображение этого решения приведено на Рис. 2.

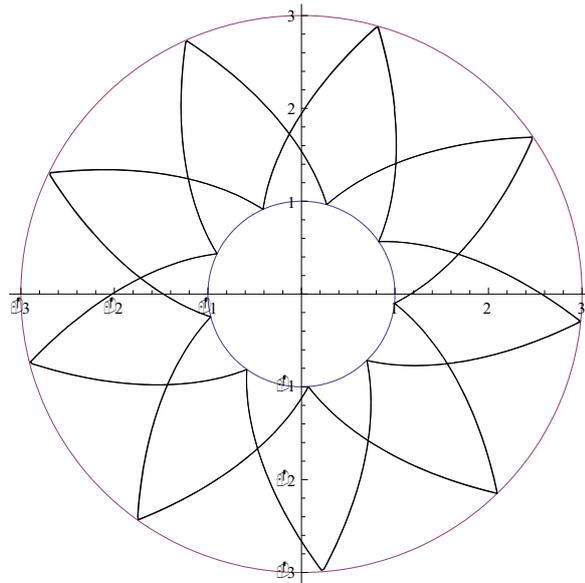


Рис.2. Периодическое решение

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы, М.: Наука, 1974.
- [2]. Pryadko I.N., Sadovsky B.N. On locally explicit equations and systems with switching, Func. Diff. Equat., 2006 г., Т. 13, №3, P. 571-584.
- [3]. Mayergoyz I.D. Mathematical Models of Hysteresis, New York: Springer, 1991.
- [4]. Зубов С.В. Устойчивость периодических решений в системах с гистерезисом Нелинейный анализ и его приложения: тез. докл. междунар. конгр, Москва, 1-5 сент. 1998 г., М. 1998, С. 293-307.
- [5]. Красносельский А.М., Рачинский Д. И. О континуумах циклов в системах с гистерезисом, 2001, Т. 378, № 3, С. 314-319.
- [6]. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом, М.: Наука, 1983.