УДК 512.64

Дорджиева А., Жардемова А., Баляева М.

Dordjieva A., Djardemova A., Balyaeva M.

Студенты 2 курса магистратуры

направление «Математика»

ФГБОУ ВО «Калмыцкий государственный университет

им. Б. Б. Городовикова»

Аннотация: *Каждое эрмитово симметрическое пространство является однородным пространством для своей группы изометрий и имеет единственное разложение как произведение неприводимых пространств и евклидова пространства. Неприводимые пространства возникают попарно как некомпактное пространство, которое, как показал Борель, может быть вложено как открытое подпространство его компактного сопряженного пространства.*

Abstract: *Every Hermitian symmetric space is a homogeneous space for its group of isometries and has a unique decomposition as the product of irreducible spaces and Euclidean space. Irreducible spaces arise in pairs as a non-compact space, which, as Borel showed, can be embedded as an open subspace of its compact conjugate space.*

Ключевые слова*: пространство, произведение, матрица, неравенство.*

Keywords : *space, product, matrix, inequality.*

Евклидовы и эрмитовы пространства

Определение 1. Пусть $V-\mathbb{R}-$ векторное пространство. Тогда отображение $\varphi: V\times V\to\mathbb{R}$: $x,y\to(x,y)$ называется скалярным произведением на V, если выполняется, следующие условия:

1) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y), \quad \forall\, x_1,x_2,y\in V,$
2) $(a\cdot x,y)=a\cdot(y,x), \ \forall\, a,x,y\in V,$
3) $(y,x)=(x,y), \quad \forall\, x,y\ \in V,$
   $(x,x)\geq 0, \quad \forall\, x\in V,$ причём
   $(x,x)=0$ тогда и только тогда , когда $x=0$.

Таким образом условия 1) и 2) означают, что φ линейно попарно первой переменной, условие 3) означает $\varphi-$ симметрическая, а условие 4) означает, положительную определенность формы φ.

Следствие 1. Скалярное произведение на вещественном пространстве является билинейной, симметричной, квадратичной формой, которой является положительно определенной.

Определение 2. Пусть $V-\mathbb{C}-$ векторное пространство. Тогда отображение $\varphi: V\times V\to\mathbb{C}$ $-$скалярное произведение на V, если:

1) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y), \quad \forall\, x_1,x_2,y\in V$
2) $(a\cdot x,y)=a\cdot(y,x), \ \forall\, a,x,y\in V$
3) $(y,x)=(x,y), \quad \forall\, x,y\ \in V$
4) $(x,x)\geq 0, \quad \forall\, x\in V,$ причём
   $(x,x)=0$ тогда и только тогда , когда $x=0$.

Определение 3. Вещественное пространство, на которой задано некоторое скалярное произведение, называется евклидовым пространством.

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} - \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x_i \in \mathbb{R}\}$ вещественны n −мерных векторов является евклидовым со скалярным

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,.$$

Определение 4. Квадратная матрица A называется симметричной, если $A = A'$.

Определение 5. Симметричная матрица A называется положительно определенной, если все ее главные миноры положительны.

Пример 2. Пусть любое $A\big(\in M_n(\mathbb{R})\big)$, $A > 0$, т.е. $A -$ симметрический и все ее главные миноры > 0, следовательно $\varphi_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \varphi_A(x, y) = X^T \cdot A \cdot Y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n -$ скалярное произведение.

Пример 3. Пусть $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}} -$ эрмитово $(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \qquad A = E_n > 0$.

Пример 4. Пусть любое $A\big(\in M_n(\mathbb{C})\big)$, $A > 0$, то есть $A -$ эрмитовый симметрический и все ее главные миноры > 0, следовательно $\varphi_A : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} : \varphi_A(x, y) = X^T \cdot A \cdot \bar{Y} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n -$ скалярное произведение.

Определение 6. Эрмитова форма $f(x, y)$ называется положительно определенной, если для любого $x \neq 0$ справедливо неравенство $f(x, x) > 0$.

Теорема 1. Критерий Сильвестра положительной определенности. Эрмитова форма положительна, определена тогда и только тогда когда все ее главные миноры (расположены по главной диагонали) > 0.

Следствие 2. Скалярное произведение на комплексном векторном пространстве является положительно определенной эрмитовой формой.

Определение 7. Комплексное пространство, на которой задано некоторое скалярное произведение называется эрмитовым пространством.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.- М.: Наука, 1989 г. – 624 с.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру, часть 2. Линейная алгебра (глава 2 и 3).- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012 г. – 361 с.
3. Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1975 г. – 449 с.
4. Соболев В. И. Нормальный оператор // Математическая энциклопедия / И. М. Виноградов (гл. ред.). — М.: Советская энциклопедия, 1982. — Т. 3. — 592 с.