УДК 358

Ассистент кафедры высшей математики и информатики Рахимов А ПИТТУ

Республика Таджикистан, г.Худжанда

МОДЕЛЬ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦ

Аннотация: В работе рассматривается модель международной торговли в макроэкономике связанное с теорией матрицы и векторной алгебры. Рассмотрены некоторые математические модели и их экономическое значимость. Также в роботе рассмотрены теория систем линейных алгебраических уравнений и её применения в собственных значениях матрицы. Определена актуальность работы. Рассмотрены разные методы решение транспортной задачи.

Ключевые слова: торговля, модель, векторы, матрицы, СЛАУ, математическая модель, собственные значение матрицы, обратная матрица.

MODEL OF INTERNATIONAL TRADE. EIGENVECTORS AND EIGENVALUES OF MATRICES

Assistant of the Department of

Higher Mathematics and Informatics of

Polytechnic Institute of Technical University,

Tajikistan, Khujand city

Rahimov A

Abstract: The paper considers a model of international trade in macroeconomics related to the theory of matrix and vector algebra. Some mathematical models and their economic significance are considered. The robot also considers the theory of systems of linear algebraic equations and its application in the eigenvalues of the matrix. The relevance of the work has been determined. Different methods for solving the transport problem are considered.

Key words: trade, model, vectors, matrices, SLAE, mathematical model, matrix eigenvalues, inverse matrix.

Модель международной торговли (кратко: модель обмена) служит для ответа на следующий вопрос: какими должны быть соотношения между государственными бюджетами стран, торгующих между собой, чтобы торговля была взаимовыгодной, ею не было значительного дефицита торгового баланса для каждой из стран участниц.

Проблема достаточно важна, так как дефицит в торговле между странами порождает такие явления, как лицензии, квоты, таможенные пошлины и даже торговые войны[1].

Для простоты изложения рассмотрим три страны – участницы торговли с государственными бюджетами X_1, X_2, X_3, которые условно назовем США, Германия и Кувейт. Будет считать, что весь госбюджет каждой страны тратится на закупки товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран. Пусть, скажем, США тратят половину своего бюджета на закупку товаров внутри страны, ¼ бюджета – на товары из Германии, оставшуюся ¼ бюджета – на товары из Кувейта. Германия тратит поровну свой бюджет на закупку товаров в США, внутри страны и у Кувейта. Кувейт, в свою очередь, тратит ½ бюджета на закупки в Германии и ничего не закупает внутри страны[2].

Ведем структурную матрицу торговли:

$$\begin{array}{ccc} \text{США} & \text{Германия} & \text{Кувейт} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Вообще, пусть a_{ij} – часть госбюджета, которую j – я страна тратит на закупки товаров i – й страны. Заметим, что сумма элементов матрицы A в каждом столбце равна единице[2].

После подведения итогов торговли за год страна под номером i получит выручку $p_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3$. Например, США будут иметь выручку

$$p_i = \underset{\text{доля США}}{\frac{1}{2}X_1} + \underset{\text{доля Германии}}{\frac{1}{3}X_2} + \underset{\text{доля Кувейта}}{\frac{1}{2}X_3}$$

Для того чтобы торговля была сбалансированной, необходимо потребовать бездефицитность торговли для каждой страны:

$$p_i \geq X_1 \text{ для всех } i. \qquad (1)$$

Предложение 1. *Условием бездефицитной торговли являются равенства* $p_i = X_1$, *i = 1, 2, 3.*

Доказательство. Предположим, что $p_i > X_1$ для некоторого i, например, для i = 1. Запишем условие (1) для всех i:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 > X_1;$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 > X_2;$$

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 > X_3.$$

Сложив все эти неравенства, получим:

$$(a_{11}+a_{21}+a_{31})X_1+(a_{12}+a_{22}+a_{32})X_2+(a_{13}+a_{23}+a_{33})X_3 > X_1+X_2+X_3$$

Поскольку все суммы в скобках в левой части неравенства равны 1, то получим противоречивое неравенство

$$X_1+X_2+X_3 > X_1+X_2+X_3$$

Следовательно, наше предположение о том, что $p_i > X_1$, неверно. Доказательство завершено.

Пример 1. Найдем собственные векторы и собственные значения следующей матрицы порядка 2:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}.$$

Положим, $\bar{x}=(x_1,x_2)^T$ – вектор – столбец. Тогда из соотношения

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} x_1+2x_2=\lambda x_1\\ -x_1+4x_2=\lambda x_1\end{cases},$$

или

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+2x_2=0\\ -x_1+(4-\lambda)x_2=0\end{cases}. \qquad (2)$$

Если вектор $\bar{x}$ – собственный, то это означает, что однородная система уравнений (3.15) имеет нулевое решение. Согласно последней теореме это условие эквивалентно тому, что определитель системы (2) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Таким образом, собственными значениями матрицы A будут числа 2 и 3.

Найдем соответствующие собственные векторы. Подставим $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$ в систему (3.15):

$\lambda_1 = 2,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases},$$

$x_1 = 2t, x_2 = t,$

$\bar{x} = t(2,1), t \neq 0,$

$\lambda_2 = 3,$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases},$$

$x_1 = t, x_2 = t,$

$\bar{x} = t(1,1), t \neq 0.$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Т.В. Алесинская. Учебное пособие по решению задач по курсу «Экономико – математические методы и модели». Таганрог:. из. ТРТУ , 2002. – 153 с.

[2] Н.Ш. Кремер. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для студентов вузов, 2007- 479 с. - М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000. - 136