УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки,

университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАДОНОВЫХ МЕР

Аннотация: *Теория меры играет важную роль в теории субгармонических и δ-субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина способа построения асимптотических характеристик для радоновых мер. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.*

Ключевые слова: *мера Хана, мера Жордана, сингулярная положительная мера, линейный непрерывный функционал, радоновая мера .*

Nguyen Van Quynh.

PhD in Physics and Mathematics, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

ASYMPTOTIC CHARACTERISTICS OF RADON MEASURES

Abstract: *Measure theory plays an important role in the theory of subharmonic and δ-subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the article we sharpen Azarin's variant of the method for constructing asymptotic characteristics of Radon measures. The results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.*

Key words: *Hahn measure, Jordan measure, singular positive measure, linear continuous functional; Radon measures, compact set.*

С целью упрощения терминологии мы прибегнем к некоторому огрублению и будем говорит, что радонова мера $\mu = \mu_1 - \mu_2$ есть разность двух локально конечных борелев-ских мер. По теореме 3.1 каждой вещественной радоновой мере μ взаимно однозначно ставиться в соответствие пара положительных взаимно сингулярных локально конечных борелевских мер μ_1 и μ_2, так что $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Мера μ_1 называется положительной составляющей меры μ и обозначается μ_+, мера μ_2 называется отрицательной составляя-ющей меры μ и обозначается μ_-. Мера $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ называется полной вариацией или модулем меры μ. С помощью мер μ_+, μ_- определяется ограничение μ_E меры μ на мно-жество E по формуле

$$\mu_E = (\mu_-)_E - (\mu_-)_E.$$

Отметим ещё, что на линейном пространстве $\mathfrak{R}$, а значит и на множестве вещественных радоновых мер естественным образом вводится упорядочение. Соотношение $\mu_2 \geq \mu_1$ означает, что радонова мера $\mu_2 - \mu_1$ положительна.

Мы будем рассматривать также комплексные меры Радона. Это функции множеств вида $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1 ,μ_2 – вещественные радоновые меры. Ограничение меры μ на множество E определяется по формуле $\mu_E = (\mu_1)_E + i(\mu_2)_E$. Комплексная мера Радона μ сосредоточена на множестве E, если выполняется равенство $\mu = \mu_E$. Носитель опре-деляется и для комплексных мер Радона.

Теперь определим полную вариацию или модуль комплексной меры μ. Пусть E – произвольное борелевское множество на $\mathbb{R}_0^n$. Если хотя бы одна из величин $(\mu_1)_+(E)$, $(\mu_1)_-(E)$, $(\mu_2)_+(E)$, $(\mu_2)_-(E)$ равна бесконечности, то полагаем $|\mu|(E) = +\infty$. В противном случае поступаем следующим образом. Назовём разбиением Π множества E такой набор борелевских множеств $E_1, \ldots, E_m$, $m = 1, 2, \ldots$, что выполняются условия $E_i \cap E_k = \varnothing$ при $i \neq k$, $E = \overset{m}{\underset{k=1}{¿}} E_k$. Введём величину $|\mu|(\Pi) = \sum_{k=1}^{m} |\mu(E_k)|$. Тогда $|\mu|(E)$ есть точная верхняя грань числового множества $|\mu|(\Pi)$, где Π пробегает множество всех разбиений мно-жество E.

Нетрудно проверить, что выполняются неравенства $|\mu_1| \leq |\mu|$, $|\mu_2| \leq |\mu|$, $|\mu| \leq |\mu_1| + |\mu_2|$, и что $|\mu|$ – положительная локально конечная борелевская мера на $\mathbb{R}_0^n$.

Несложно увидеть, что для любой функции $\varphi \in \Phi\left(\mathbb{R}_0^n\right)$ справедливо неравенство

$$\left|\int_{R_0^n} \phi(x)\,d\mu(x)\right| \le \|\phi\|\,|\mu| \qquad (\mathrm{supp}\,\Phi).$$

Обозначим через $\mathfrak{R}_C$ – это множество комплексных радоновых мер на $\mathbb{R}_0^n$. Отметим, что $\mathfrak{R}_C$ является комплексным линейным пространством. В пространстве $\mathfrak{R}_C$ вводится понятие широкой сходимости. Говорят, что последовательность радоновых мер μ_m широко сходится к радоновой мере μ, если для любой функции $\varphi \in \Phi\left(\mathbb{R}_0^n\right)$ числовая последовательность $\mu_m(\varphi)$ сходится к $\mu(\varphi)$. Обозначение $\mu = \lim\limits_{m\to\infty} \mu_m$.

Вводятся некоторые понятия множеств, связанные с пространством $\mathfrak{R}_C$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется широко ограниченным, если для любой функции $\varphi \in \Phi\left(\mathbb{R}_0^n\right)$ выполняется неравенство $\sup\limits_{\mu\in E}\left|\mu(\varphi)\right| < \infty$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется сильным ограниченным, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}_0^n$ выполняется неравенство $\sup\limits_{\mu\in E}|\mu|(K) < \infty$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется компактным, если из любой последовательности $\mu_m \subset E$ можно извлечь широко сходящуюся подпоследовательность.

Пусть $\rho(t)$ – некоторый уточнённый порядок. На пространстве $\mathfrak{R}_C$ определяется однопараметрическое семейство преобразований Азарина A_t: $\mathfrak{R}_C \to \mathfrak{R}_C$, $t \in (0, \infty)$, согласно формулам

$$\mu_t = A_t\mu, \qquad \mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V(t)},$$

Для любого борелевского множества E.

Пусть $\phi \in \Phi\left(R_0^n\right)$. Формула переменных даёт

$$\int_{\mathbb{R}_0^n} \varphi(x)\,d\mu_t(x) = \frac{1}{V(t)}\int_{\mathbb{R}_0^n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right)d\mu(x). \tag{1}$$

Пусть множество $\left\{ \nu \in \mathfrak{R}_C : \nu = \lim\limits_{m\to\infty} A_{t_m}\mu, \lim\limits_{m\to\infty} t_m = +\infty \right\}$ будем называть предельным множеством Азарина и обозначим через $Fr[\mu]$.

В случае вещественных радоновых мер наряду с предельным множеством Азарина $Fr[\mu]$ важными асимптотическими характеристиками меры μ являются её верхняя конусная плотность $\overline{\Delta}(E)$ и нижняя конусная плотность $\underline{\Delta}(E)$, а также верхняя плотность $\overline{N}(\alpha,E)$ и нижняя плотность $\underline{N}(\alpha,E)$. Пусть $r_0>0$ – некоторое фиксированное число, E – борелевское подмножество единичной сферы S_{n-1} в пространстве $\mathbb{R}^n$, $f(r,E)=\mu((r_0,r]\times E)$. Тогда указанные высшие величины определяются следующим образом

$$\overline{\Delta}(E)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{f(r,E)}{V(r)}, \qquad \underline{\Delta}(E)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{f(r,E)}{V(r)},$$

$$\overline{N}(\alpha,E)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{f(r+\alpha r,E)-f(r,E)}{V(r)}, \quad \underline{N}(\alpha,E)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{f(r+\alpha r,E)-f(r,E)}{V(r)}. \qquad (2)$$

Из свойств пределов и уточнённого порядка $\rho(r)$ вытекают следующие соотношения

$$\overline{N}(\alpha+\beta,E)\le\overline{N}(\alpha,E)+(1+\alpha)^{\rho}\,\overline{N}\left(\frac{\beta}{1+\alpha},E\right), \qquad (3)$$

$$\overline{N}(\alpha+\beta,E)\ge\overline{N}(\alpha,E)+(1+\alpha)^{\rho}\,\underline{N}\left(\frac{\beta}{1+\alpha},E\right), \qquad (4)$$

$$\underline{N}(\alpha+\beta,E)\ge\underline{N}(\alpha,E)+(1+\alpha)^{\rho}\,\underline{N}\left(\frac{\beta}{1+\alpha},E\right), \qquad (5)$$

$$\underline{N}(\alpha+\beta,E)\le\underline{N}(\alpha,E)+(1+\alpha)^{\rho}\,\overline{N}\left(\frac{\beta}{1+\alpha},E\right), \qquad (6)$$

где $\rho=\rho(\infty)=\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)$.

В общем случае функция $\overline{N}(\alpha,E)$ $(\underline{N}(\alpha,E))$ является не числовой функцией, а фун-кцией со значениями из расширенной числовой прямой $[-\infty,+\infty]$. Поэтому в неравенс-твах (3)-(6) правая часть не всегда имеет смысл. Если в какомто из этих неравенств правая часть не имеет смысла, то соответствующее неравенство нужно считать пустым утверждением. По другому можно сказать так. Мы считаем, что неравенства $x\le\infty-\infty$, $x\ge\infty-\infty$ выполняются для любого $x\in[-\infty,+\infty]$.

Пусть мера μ положительна, то функция $\overline{N}(\alpha,E)$ будет возрастающей. В этом случае из равенства (4) следует, что если $\overline{N}(\alpha,E)$ конечна для некоторого $\alpha>0$, то она конечна для любого $\alpha>0$. Отметим ещё, что для вещественных мер из неравенств (4), (6) следует, что если функция $\overline{N}(\alpha,E)$ ограничена сверху на некотором интервале $(0,\delta)$, то она ограничена сверху на любом интервале $(0,a)$, а если функция $\underline{N}(\alpha,E)$ ограничена снизу на некотором интервале $(0,\delta)$, то она ограничена снизу на любом интервале $(0,a)$.

Легко видеть, что для того, чтобы обе функции $\overline{N}(\alpha,E)$ и $\underline{N}(\alpha,E)$ были непрерывными на полуоси $[0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\lim_{\alpha\to+0}\overline{N}(\alpha,E)=0, \qquad \lim_{\alpha\to+0}\underline{N}(\alpha,E)=0.$$

Обозначим $f_0(r,E)=\mu((r,r_0]\times E)$, $r<r_0$. Иногда мы будем рассматривать функцию

$$\overset{\circ}{N}(\alpha,E)=\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{f_0(r,E)-f_0(r+\alpha r,E)}{V(r)}=\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{\mu((r,r+\alpha r]\times E)}{V(r)}. \qquad (7)$$

Иногда возникает необходимость оценивать функцию $f(r,E)$ с помощью функций $\overline{N}(\alpha,E)$ и $\underline{N}(\alpha,E)$. В этом случае наряду с функцией $V(r)=r^{\rho(r)}$ полезна функция

$$S_1(r)=1+\int_1^r\frac{V(t)}{t}dt.$$

Как показывает опыт, применение функции $S_1(r)$ становится неэффективным, если эта функция является ограниченной. В случае ограниченности функции $S_1(r)$ применяют функцию

$$S_2(r)=\int_r^\infty\frac{V(t)}{t}dt.$$

С помощью правила Лопиталя получаем, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(r)}{S_1(r)}=\rho. \qquad (S_1(r) \text{ – не ограничена}) \qquad (8)$$

Имеем

$$\int_r^{er}\frac{V(t)}{t}dt=r^{n-2}\int_1^e\frac{V(\mathrm{ur})}{u}du.$$

Поскольку

$$\frac{V(ur)}{V(r)}\rightrightarrows u^\rho, \qquad r\to\infty, \quad u\in[1,e],$$

то

$$\int_r^{er}\frac{V(t)}{t}dt=(1+\bar{o}(1))\frac{e^\rho-1}{\rho}V(r),$$

Из этого следует, что $V(r)\to 0\,(r\to\infty)$, если $S_1(r)$ – ограниченная функция. Вновь применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(r)}{S_2(r)}=-\rho. \qquad (S_1(r) \text{ – ограничена}) \qquad (9)$$

Из этих равенств видно, что функции $S_1(r)$ и $S_2(r)$ особенно важны в случае $\rho = \rho(\infty) = 0$. В этом случае функции $S_1(r)$ и $V(r)$, а также функции $S_2(r)$ и $V(r)$ имеют различный рост на бесконечности.

Теорема 1. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, μ – вещественная радонова мера на $\mathbb{R}_0^n$, E – множество из единичной сферы, $N(\alpha, E)$ – верхняя плотность меры μ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, причём $N(\alpha_0, E) < +\infty$ для некоторого $\alpha_0 > 0$. Тогда существует постоянная $M > 0$ такая, что для всех $r > 1$ выполняется неравенство

$$f(r, E) \le MS_1(r).$$

Доказательство. Имеем

$$f(r,E) = f\left(\frac{r}{(1+\alpha)^{n_0}}, E\right) + \sum_{m=1}^{n_0}\left[f\left(\frac{r}{(1+\alpha)^{m-1}}, E\right) - f\left(\frac{r}{(1+\alpha)^{m}}, E\right)\right] \qquad (10)$$

Число n_0 определяется из условия

$$1 < \frac{r}{(1+\alpha_0)^{n_0}} \le 1 + \alpha_0.$$

Очевидно, что существуют постоянные M_1, M_2, M_3 такие, что выполняются неравенства

$$f(x,E) \le M_1, \quad x \in (1, 1+\alpha_0],$$

$$f\left(\frac{r}{(1+\alpha)^{m-1}}, E\right) - f\left(\frac{r}{(1+\alpha)^{m}}, E\right) \le M_2 V\left(\frac{r}{(1+\alpha_0)^{m-1}}\right), \qquad (11)$$

$$\frac{V(R)}{\int_R^{(1+\alpha_0)R} \frac{V(t)}{t}dt} \le M_3, \quad R \ge 1, \qquad (12)$$

Из этих неравенств и равенства (4.10) легко следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Применяя лемму 4.1 к мере $-\mu$, получим следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть E – множество из единичной сферы, $\underline{N}(\alpha, E)$ – нижняя плотность вещественной радоновой меры μ на $\mathbb{R}_0^n$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Если для некоторого $\alpha_0 > 0$ $\underline{N}(\alpha, E) > -\infty$, то существует постоянная M такая, что для всех $r > 1$ выполняется неравенство

$$f(r, E) \ge -MS_1(r).$$

Далее рассмотрим уточнённые порядки $\rho(r)$, для которых функция $S_1(r)$ является ограниченной.

Теорема 3. Пусть μ – вещественная мера Радона на $\mathbb{R}_0^n$, $\rho(r)$ – уточнённый порядок, E – множество из единичной сферы, $N(\alpha,E)$ – верхняя плотность меры μ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, причём $N(\alpha_0,E)<+\infty$ для некоторого $\alpha_0>0$ и функция $S_1(r)$ ограничена. Тогда существует постоянная M такая, что для $r\geq 1$ выполняется неравенство

$$\mu([r,\infty)\times E)\leq MS_2(r).$$

В данном случае

$$\mu([r,\infty)\times E)=\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\mu\left(\left(r,(1+\alpha_0)^m r\right]\times E\right).$$

Доказательство.
Имеем

$$\mu([r,\infty)\times E)=\overline{\lim_{m\to\infty}}\sum_{k=1}^{m}\mu\left(\left[(1+\alpha_0)^{k-1}r,(1+\alpha_0)^k r\right]\times E\right).$$

Из этого равенства и неравенств (4.11), (4.12) следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Применяя лемму 4.3 к мере $-\mu$, получим следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть μ – вещественная мера Радона на $\mathbb{R}_0^n$, $\rho(r)$ – уточнённый порядок, E – множество из единичной сферы, $\underline{N}(\alpha,E)$ – нижняя плотность меры μ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, причём $\underline{N}(\alpha_0,E)>-\infty$ для некоторого $\alpha_0>0$ и функция $S_1(r)$ ограничена. Тогда существует постоянная M такая, что для $r\geq 1$ выполняется неравенство

$$\mu([r,\infty)\times E)\geq -MS_2(r).$$

В данном случае

$$\mu([r,\infty)\times E)=\underline{\lim_{m\to\infty}}\,\mu\left(\left[r,(1+\alpha_0)^m r\right]\times E\right).$$

При использовании верхней и нижней плотности важную роль играют теоремы о равномерности.

Список литературы

1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.

2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom,Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.
5. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON A COMPACT SET IN THE SPACE OF RADON MEASURES "Мировая наука" №11 (56) 2021.