УДК 51-74

Феданов Н.С.
аспирант
ФГБОУ ВО «Уральский государственный университет путей сообщения»
Россия, г.Екатеринбург

РЕШЕНИЕ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ПРИ ПОМОЩИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MATHCAD

Аннотация: при определении параметров в электрических цепях приходится сталкиваться с системой дифференциальных уравнений. Решение таких уравнений часто бывает сложным. В данной статье показано решение такого уравнения обычным методом, а также упрощенное решение методом преобразования Лапласа при помощи программы MathCAD.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, преобразование Лапласа, электрическая цепь, переходный процесс, MathCAD.

Fedanov N.S.
graduate student
Ural State University of Railway Transport
Russia, Yekaterinburg

SOLUTION OF ELECTROTECHNICAL PROBLEMS BY THE METHOD OF LAPLACE CONVERSION BY USING MATHCAD MATHEMATICAL PACKAGE

Abstract: when determining parameters in electrical circuits, one has to deal with a system of differential equations. The solution to such equations is *often complicated. This article shows the solution of such an equation by the usual method, as well as a simplified solution by the Laplace transform method using the MathCAD program.*

Key words: differential equation, Laplace transform, electric circuit, transient.

Рассмотрим одиночный замкнутый электрический контур со следующими параметрами (Рис.1.)

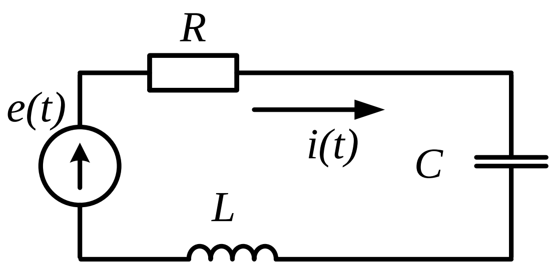

Рис. 1. Электрический контур

В этом контуре находится генератор, создающий переменное во времени напряжение $e(t)$, которое вызывает в контуре ток $i(t)$. Падение напряжения равно $L\frac{di}{dt}$ на индуктивности, Ri — на сопротивлении и $\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt$ — на емкости. Согласно закону Кирхгофа, суммарное падение напряжения в контуре равно приложенной электродвижущей силе $e(t)$, следовательно, имеет место уравнение (1).

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = e(t) \qquad (1)$$

Это интегро-дифференциальное уравнение, определяющее ток $i(t)$, можно преобразовать в дифференциальное уравнение второго порядка (2) если в качестве новой переменной ввести заряд конденсатора $k(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$.

$$L\frac{d^2k}{dt^2} + R\frac{dk}{dt} + \frac{1}{C}k = e(t) \qquad (2)$$

В дальнейшем в целях лучшей обозримости вычислений примем, что контур в момент времени $t = 0$ находился в состоянии покоя.

Тогда для уравнения (1) соответствующим ему изображающим уравнением будет:

$$LpI(p) + RI(p) + \frac{1}{Cp}I(p) = E(p)$$

Введя для сокращения записи обозначение $Lp + R + \frac{1}{Cp} = Z(p)$, получим уравнение (3).

$$Z(p)I(p) = E(p) \qquad (3)$$

Функцию $I(p)$ назовем током, а функцию $E(p)$ — напряжением.

Тогда на языке пространства изображений уравнение (3) будет выражать не что иное, как закон Ома, если только функцию $Z(p)$ назвать сопротивлением. Однако вместо этого названия для функции $Z(p)$ принят термин импеданс.

Для примера решим следующую задачу. Дана схема (Рис.2) со следующими исходными данными: $E = 100$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $L = 100$мГн, $C = 10$мкФ. Пусть в момент коммутации емкость была полностью разряжена.

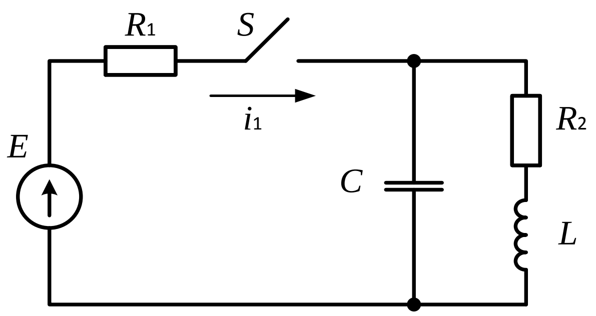

Рис. 2. Исходная схема электрической цепи

Необходимо определить значение входного тока после замыкания ключа.

Изобразим операторную схему замещения (Рис.3)

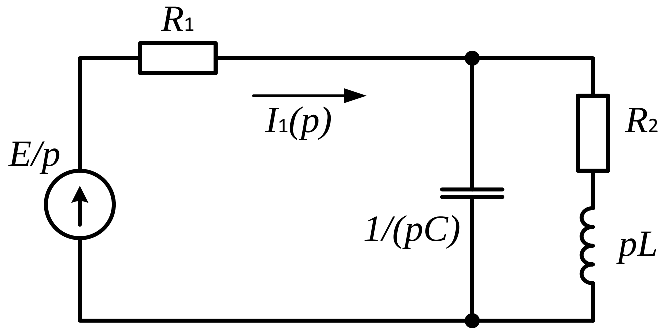

Рис. 3. Операторная схема замещения

Общее операторное сопротивление цепи равно:

$$Z(p) = R_1 + \frac{(R_2 + pL)\frac{1}{pC}}{R_2 + pL + \frac{1}{pC}}$$

Преобразовав это выражение и, для упрощения расчетов, введя новые переменные, получим:

$$Z(p) = \frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{a_2p^2 + a_1p + 1},$$

где $b_2 = R_1LC,\ \ b_1 = R_1R_2C + L,\ \ b_0 = R_1 + R_2\,, a_2 = LC,\ a_1 = R_2C$

Изображение тока $I_1(p)$ по закону Ома будет

$$I_1(p) = \frac{E}{pZ(p)} = \frac{E(a_2p^2 + a_1p + 1)}{p(b_2p^2 + b_1p + b_0)}$$

Приравняв нулю знаменатель этого выражения, мы, как и следовало ожидать, получим нулевой корень, соответствующий действию в цепи источника постоянной ЭДС, и еще два корня

$$p_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{{b_1}^2 - 4b_2b_0}}{2b_2}$$

при исходных данных задачи равные $p_1 = -261$ и $p_2 = -4789$

Для определения оригинала тока воспользуемся выражением

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p)}{F_3(p)} + \sum_{k=0}^{m} \frac{F_1(p_k)}{p_kF'_2(p_k)} e^{p_kt} = f(t)$$

Тогда ток $i_1(t)$ будет равен

$$i_1(t) = \frac{E}{b_0} + \frac{E(a_2 {p_1}^2 + a_1 p_1 + 1)}{p_1(2b_2 p_1 + b_1)} e^{p_1 t} + \frac{E(a_2 {p_2}^2 + a_1 p_2 + 1)}{p_2(2b_2 p_2 + b_1)} e^{p_2 t}$$

Подставив числовые значения, окончательно получаем:

$$i_1(t) = 4 - 4{,}46e^{-261t} + 5{,}46e^{-4789t} \text{ (A)}$$

Построим график в программе MathCAD (Рис.4).

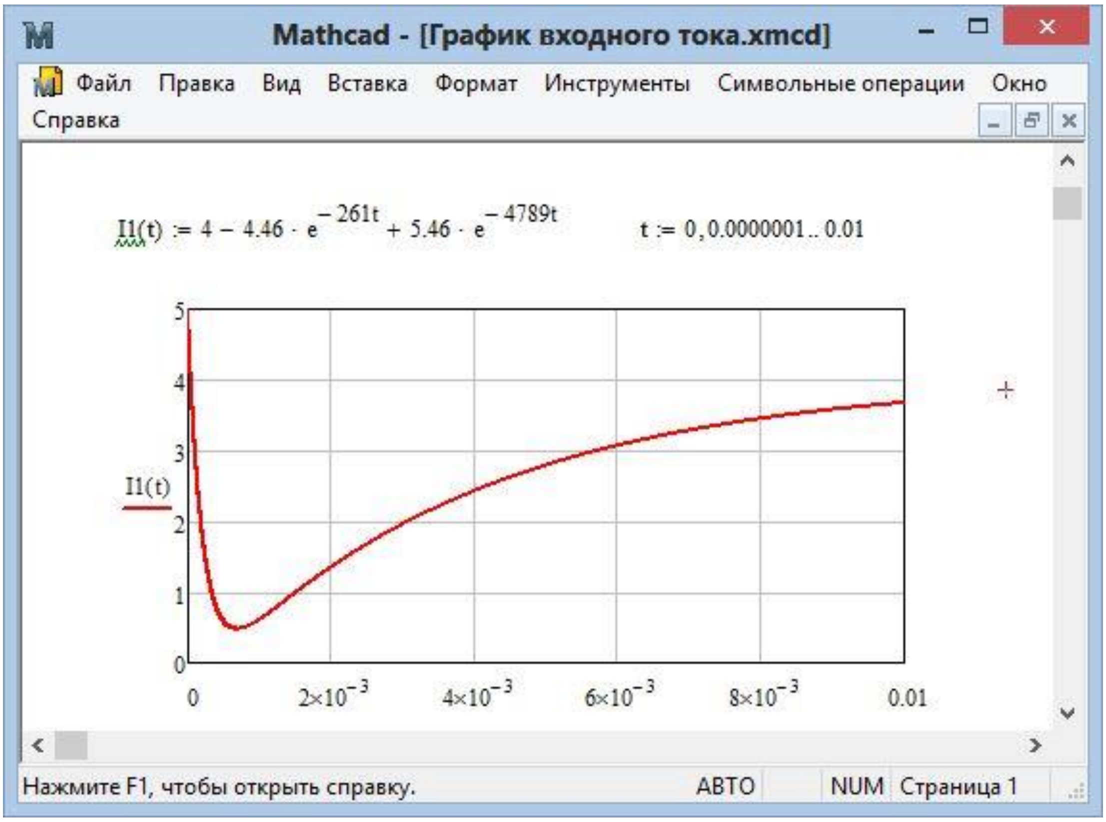

Рис. 4. График входного тока в MathCAD

При помощи встроенной функции обратного преобразования Лапласа в математическом пакете MathCAD, можно решить данную задачу гораздо быстрее. Пример такого расчета приведем ниже (Рис.5).

Сравнивая уравнения для тока, рассчитанного "вручную" и при помощи программы MathCAD, можно сказать, что они идентичны, т.к. если представить гиперболический синус и гиперболический косинус в виде экспонент, то мы придем к такому же уравнению, что получили ранее.

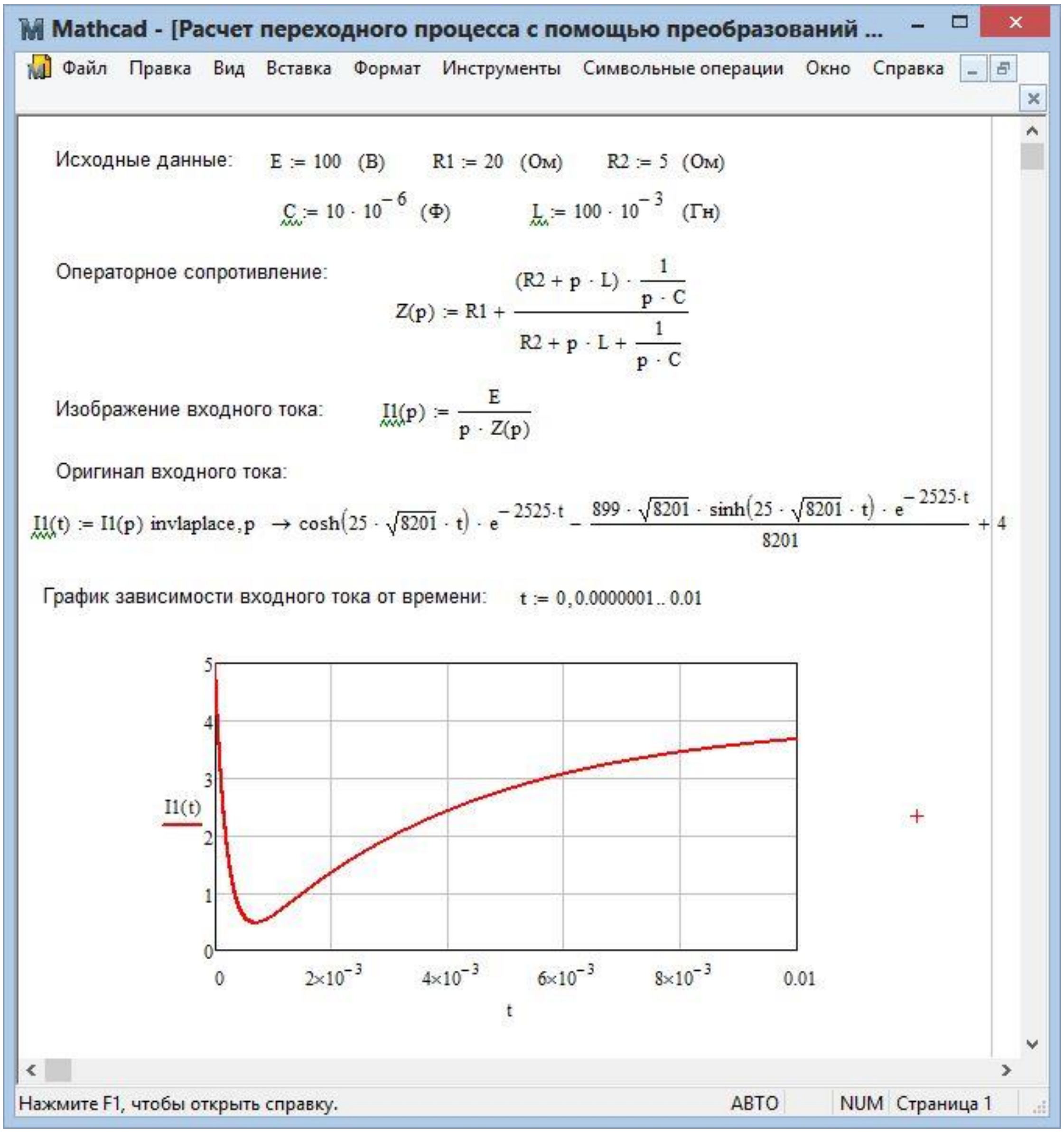

Рис. 5. Пример расчета в программе MathCAD

Таким образом, использование обратного преобразования в математическом пакете MathCAD намного упрощает задачу нахождения параметров электрической цепи.

Использованные источники:

1. Вешников А.Г., ТихоновьА.Н. Теория функций комплексной переменной. Москва, Наука, 1967, 304 .
2. Дёч Г. Руководство по практическому применению преобразования Лапласа. Москва, Наука, 1965, 288 с.