УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки,

университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

Нгуен Ван Мань

Магистр математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки, университет Ханой

промышленности, Ha Noi, Вьетнам.

E-Mail: nvmanhhhn@haui.edu.vn.

ОБ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВАХ УТОЧНЁННОГО ПОРЯДКА

Анотация: Уточнённый порядок играет важную роль в теории субгармонических и δ-субгармонических функций. Классические свойства были представлены во многих монографиях, например в [1]. Отметим, что с помощью уточнённого порядка А.Ф. Гришин изучил рост субгармонических и δ-субгармонических функций на бесконечности. В статье предлагается усиление варианта Гришина теоремы о свойствах уточнённого порядка. Результат нашей статьи позволяет несколько упростить конструкции из доказательства нескольких утверждений.

Ключевые слова: Уточнённый порядок, равномерная непрерывность, абсолютно непрерывная функция.

Nguyen Van Quynh.

PhD in Physics and Mathematics, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

Nguyen Van Manh.

Master of Mathematical Sciences, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam.

E-Mail: nvmanhhhn@haui.edu.vn.

ABOUT THE BASIC PROPERTIES OF PROXIMATE ORDER

Abstact: Proximate orde is important in the theory of subharmonic and δ-subharmonic functions. Classical properties were presented in many monographs, for example in [1]. Note that using the proximate order of A.F. Grishin studied the growth of subharmonic and δ-subharmonic functions at infinity. In the article we sharpen Grishin's variant of the property theorems of proximate order. The result of this paper allows us to somewhat simplify the constructions from the proof of several assertions.

Key words: Proximate orde, uniform continuity, absolutely continuous function.

Уточнённый порядок играет важную роль в теории роста субгармонических функции, в ряде других разделов математики.

Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$ на полуоси $(0,\infty)$ называется уточнённым порядком, если выполняются следующие два условия :

1) существует предел $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r)=\rho(\infty)=\rho\in(-\infty,\infty)$,

2) $\lim\limits_{r\to+\infty} r\ln r\rho'(r)=0$.

В приложениях чаще всего используется не сам уточнённый порядок $\rho(r)$, а функ-ция $V(r)=r^{\rho(r)}$. Отметим следующее свойство уточнённого порядка.

Теорема 1. для любого $t>0$ существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(tr)}{V(r)}=t^{\rho},$$

и этот предел равномерный на любом сегменте $[a,b]\subset(0,\infty)$.

Если $\rho(r)$ – уточнённый порядок, то существует дифференцируемый, и даже анали-тический, уточнённый порядок $\rho_1(r)$ такой, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(r)}{V_1(r)}=1,$$

где $V_1(r)=r^{\rho_1(r)}$.

Поэтому предположение о дифференцируемости уточнённого порядка часто не ограничивает общности рассуждений. В дальнейшем мы будем предполагать, что функ-ция $\rho(r)$ является непрерывно дифференцируемой на полуоси $(0,\infty)$.

Рост произвольной функции $f(r)$ сравнивается с ростом функции вида $V(r)$.

Множество функций вида $V(r)$ – это более широкое множество, чем множество степеней r^{α}, $\alpha \in (-\infty, \infty)$, или множество функций вида $r^{\alpha_0}(\ln r)^{\alpha_1}(\ln_2 r)^{\alpha_2}\ldots(\ln_k r)^{\alpha_k}$, где α_m – вещественные числа, а $\ln_m r$ – это m-тая итерация логарифма. Например, $\ln_2 r = \ln\ln r$.

Пусть $f(r)$ – положительная функция на полуоси $(0,\infty)$. Порядком функции f называется число

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln f(r)}{\ln r}.$$

Важность понятия уточнённого порядка в теории роста функций можно усмотреть из следующей теоремы.

Положительная на полуоси $(0,\infty)$ функция $f(r)$ называется регулярно меняющейся в смысле Караматы, если для любого $\lambda > 0$ существует конечный предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(\lambda r)}{f(r)}.$$

Теорема 2. Пусть $\rho_1(r)$ и $\rho_2(r)$ – уточнённые порядки такие, что $\lim_{r\to\infty} \rho_1(r) = \lim_{r\to\infty} \rho_1(r) = \rho$. Пусть $\mu \in \mathrm{M}_{\infty}(\rho_1(r))$, а мера λ определяется равенством

$$d\lambda(x) = \frac{V_2(\|x\|)}{V_1(\|x\|)} d\mu(x).$$

Тогда $\lambda \in \mathrm{M}_{\infty}(\rho_2(r))$ и соотношения $\mu_{t_k} \to \nu$, $\lambda_{t_k} \to \nu$ эквивалентны. Здесь

$$\mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V_1(t)}, \qquad \lambda_t(E) = \frac{\lambda(tE)}{V_2(t)},$$

$$V_1(t) = t^{\rho_1(t)}, \qquad V_2(t) = t^{\rho_2(t)}.$$

Доказательство. Имеем

$$|\lambda|(B(0,2r)\setminus C(0,r)) = \int_{B(0,2r)\setminus C(0,r)} \frac{V_2(\|x\|)}{V_1(\|x\|)} d|\mu|(x).$$

Из теоремы 2.1 легко следует, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{|\lambda|(B(0,2r)\setminus C(0,r))}{V_2(r)} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{|\mu|(B(0,2r)\setminus C(0,r))}{V_1(r)}.$$

Из того, в свою очередь, следует, что $\lambda \in \mathrm{M}_{\infty}(\rho_2(r))$.

Пусть $\mu_{t_k} \to \nu$, $\varphi \in \Phi$. Имеем

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}_0^n}\varphi(x)\,d\lambda_{t_m}(x)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{V_2(t_m)}\int_{\mathbb{R}_0^n}\varphi\left(\frac{u}{t_m}\right)d\lambda(u)=$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{V_2(t_m)}\int_{\mathbb{R}_0^n}\varphi\left(\frac{u}{t_m}\right)\frac{V_2(\|u\|)}{V_1(\|u\|)}d\mu(u)=\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}_0^n}\varphi(\tau)\frac{V_2(\|t_m\tau\|)}{V_1(\|t_m\tau\|)}\frac{V_1(t_m)}{V_2(t_m)}d\mu_{t_m}(\tau)\,.$$

Так как последовательность

$$\varphi(\tau)\frac{V_2(\|t_m\tau\|)}{V_1(\|t_m\tau\|)}\frac{V_1(t_m)}{V_2(t_m)}$$

Сходится в пространстве Φ к функции $\varphi(\tau)$ и $\mu_{t_m}\to\nu$, то следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}_0^n}\varphi(x)\,d\lambda_{t_m}(x)=\int_{\mathbb{R}_0^n}\varphi(\tau)\,d\nu(\tau)\,.$$

Тем самым мы доказали, что $\lambda_{t_m}\to\nu$. В доказанном утверждении можно поменять местами μ и ν. Теорема доказана.

Обозначим

$$h_n(x)=\begin{cases}\|x\|^{2-n}, n\geq 3,\\ \ln|x|, n=2.\end{cases}$$

Отметим, что мы рассматриваем ядро $h_n(x-y)$ ещё и как отображение с областью отпра-вления $R^n\left(y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in R^n\right)$ и областью прибытия $L_p(\gamma)$. В этом случае будем писать

$$h_n(x-y):R^n\to L_p(\gamma).$$

В следующей теореме доказывается важное свойство ядра $h_n(x-y)$, имеющего зависимость от y является равномерно непрерывной.

Теорема. Пусть $p\geq 1-$¿ произвольное фиксированное число. Пусть $\gamma-$¿ положите-льная конечная финитная борелевская мера такая, что

$$¿\left\{\int_{B(y,\delta)}|h_n(x-y)|^p\,d\gamma(x):y\in\overline{R^n}\right\}\to 0\,(\delta\to 0).$$

Тогда функция $h_n(x-y):\overline{R^n}\to L_p(\gamma)$ является равномерно непрерывной в $\overline{R^n}$.

Доказательство. Обозначим

$$\psi(y_1,y_2)=\left(\int|h_n(x-y_1)-h_n(x-y_2)|^p\,d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$F(y)=\left(\int|h_n(x-y)|^p\,d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как ядро $h_n(x-y)$ как функция из $\overline{R^n}\times\overline{R^n}$ в R не ограничено, то нужно доказать сходимость введенных интегралов. Из неравенства Минковского следует, что

$$F(y)\leq\left(\int_{B(y,\delta)}|h_n(x-y)|^p\,d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{CB(y,\delta)}|h_n(x-y)|^p\,d\gamma(x)\right)=J_1+J_2,$$

где $CB(y,\delta)=R^n/B(y,\delta)$. Пусть $\delta_1 = ^{\{\|x-y\|:x\in supp\,\gamma\}}$ ¿, так как $\gamma-$¿ финитна, то $\delta_1<\infty$. Поскольку $x\in CB(y,\delta)$, то $\|x-y\|>\delta$. Тогда

$$|h_n(x-y)|\leq f(\delta)=\begin{cases}\delta^{2-n}, n\geq 3,\\ max\{|\ln\delta|,|\ln\delta_1|\}, n=2.\end{cases}$$

Из этого неравенства следует, что $J_2\leq f(\delta)\left(\gamma(R^n)\right)^{\frac{1}{p}}$. По условию теоремы $J_1\leq 1$ при достаточно малых δ. От сюда получаем конечность $F(y)$. Доказанное можно формулировать и так: при любом $y \in \overline{R^n}$ ядро $h_n(x-y)$ есть элемент пространства $L_p(\gamma)$. Из неравенства $\psi(y_1, y_2) \le F(y_1) + F(y_2)$ следует конечность $\psi(y_1, y_2)$.

Теперь найдем множества, на которых величина $\|\nabla_y h_n(x-y)\|$ ограничена. Точнее, докажем, что при $\|x-y\| \ge \delta$, выполняется неравенство

$$\|\nabla_y h_n(x-y)\| \le g(\delta) = \begin{cases} \dfrac{n-2}{\delta^{n-1}}, n \ge 3, \\ \dfrac{1}{\delta}, n=2. \end{cases} \quad (1)$$

Имеем

$$\left(h_n(x-y)\right)'_{y_i} = (n-2)\frac{y_i - x_i}{\|x-y\|^n}(i=1,2,\ldots,n),$$

$$\left(h_2(x-y)\right)'_{y_i} = \frac{y_i - x_i}{\|x-y\|^2}(i=1,2).$$

Из этих формул легко получается неравенство (1).

Теперь докажем собственное утверждение, формулируемое следующее соотношение

$$\psi(y, y_0) \to 0 (y \to y_0).$$

Пусть $\delta > 0 - ¿$ произвольное число. Будем считать, что выполняется неравенство $\|y-y_0\| \le \delta$. Последовательное применение неравенства Минковского и включения $B(y_0, 2\delta) \subset B(y, 3\delta)$ даёт

$$\psi(y, y_0) \le \left(\int\limits_{CB(y_0, 2\delta)} |h_n(x, y) - h_n(x, y_0)|^p d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\int\limits_{B(y_0, 2\delta)} |h_n(x, y_0)|^p d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{B(y_0, 3\delta)} |h_n(x, y)|^p d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}} = J_1 + J_2 + J_3.$$

Если $x \notin B(y_0, 2\delta)$, $\|y-y_0\| \le \delta$, то для любого $w \in B(y_0, \|y-y_0\|)$ будут выполняться неравенства $\|x-w\| \ge \delta$, $\|\nabla_y h_n(x-w)\| \le g(\delta)$. Из оценки градиента следует, что

$$|h_n(x, y) - h_n(x, y_0)| \le g(\delta)\|y-y_0\|, J_1 \le g(\delta)\left(\gamma(R^n)\right)^{\frac{1}{p}}\|y-y_0\|.$$

Из условия теоремы получаем $J_2 \to 0$, $J_3 \rightrightarrows 0 (\delta \to 0)$, что доказывает требуемое утверждение.

В заключение доказательства теоремы мы предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, последовательности y_{2m}, y_{1m} такие, что $y_{2m} - y_{1m} \to 0 (m \to \infty)$, $\psi(y_{2m}, y_{1m}) \ge \varepsilon$. Не ограничивая общности, можно считать, что $y_{1m} \to y_0 \in \overline{R^n}(m \to \infty)$. Из очевидного соотношения $\psi(y_{2m}, y_{1m}) \to 0 (y_{2m} - y_{1m} \to 0, y_{1m} \to \infty, m \to \infty)$ следует, что $y_0 \ne \infty$.

Из неравенства Минковского следует, что

$$\psi(y_{2m}, y_{1m}) \le \psi(y_{2m}, y_0) + \psi(y_{1m}, y_0).$$

Набор полученных нами утверждений в совокупности противоречив. Тем самым теорема доказана.

Список литературы

1. *Левин Б.Я.,* 1956, Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, Москва.
2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom,Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.
5. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON A COMPACT SET IN THE SPACE OF RADON MEASURES "Мировая наука" №11 (56) 2021.