Атаджанова Максуда., бакалавр, 4 курс

ФГБОУ ВО «КалмГУ им. Б.Б. Городовикова»

Россия, г. Элиста

Научный руководитель: Мучкаева С.С.,

к.п.н., доцент кафедры алгебры и анализа

Atadzhanova Maksuda., student, 4 year

KalmSU

Russia, Elista

Scientific adviser: Muchkaeva S.S.,

Candidate of Pedagogical Sciences,

Associate Professor of the Department of Algebra and Analysis

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ «ПРЯМАЯ ЭЙЛЕРА» С ТРЕУГОЛЬНИКА НА ОРТОЦЕНТРИЧЕСКИЙ ТЕТРАЭДР

Аннотация: *в данной статье рассматривается один из подходов одновременного изучения свойств треугольника и тетраэдра.*

Ключевые слова: *прямая Эйлера,* ортоцентрический тетраэдр, теорема Эйлера, равногранный тетраэдр.

A GENERALIZATION OF THE CONCEPT OF «EULER STRAIGHT LINE» FROM A TRIANGLE TO AN ORTHOCENTRIC TETRAHEDRON

Abstract: *this article presents one of the approaches to the simultaneous study of the properties of a triangle and a tetrahedron.*

Keywords: *Euler line, orthocentric tetrahedron, Euler theore, isometric tetrahedron.*

Треугольник, как кладезь прекрасных и поразительных геометрических конструкций, поистине неисчерпаем. Их пестрота и изобилие, с трудом поддающиеся какой-либо систематизации, не могут не восхищать. Красивая теорема в геометрии треугольника связана, как правило, с замечательными точками, прямыми или окружностями. Но прямая или окружность замечательна, если содержит какие-нибудь замечательные точки треугольника. В точки эти, стало быть, все и упирается.

При рассмотрении замечательных точек и других геометрических образов, связанных с треугольником, часто не удается сразу начертить треугольник, в котором замечательные точки достаточно далеко отстояли друг от друга. С целью облегчить построение такого треугольника Д. Саттерли предлагает несколько треугольников, размеры которых подобраны так, что замечательные точки и окружности хорошо выделяются. Рассмотрим такой «хороший треугольник».

Но сначала рассмотрим знаменитую теорему великого Л. Эйлера.

Теорема: В треугольнике точка пересечения медиан, ортоцентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой.

Доказательство: Проведем через вершины треугольника ABC прямые, параллельные сторонам треугольника, до их взаимного пересечения в точках A_1, B_1, C_1. Тогда четырехугольники ABA_1C, CAC_1B, $ABCB_1$ – параллелограммы. Значит, $BC_1 = BA_1 = AC$. $B_1C = A_1C = BA$.

Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 являются диагоналями этих параллелограммов и делят пополам стороны BC, AC, AB соответственно. Тогда эти отрезки пересекаются в точке M пересечения медиан треугольника ABC, и

$$MA/MA_1 = MB/MB_1 = MC/MC_1 = -½.$$

Это значит, что при гомотетии с центром в точке M и коэффициентом $k = -1/2$ треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Данная гомотетия переводит центр O окружности, описанной около треугольника ABC, в точку H, т.е. точки M, O, H лежат на одной прямой. При этом точка M лежит между точками O и H, и MH = 2MO.

Проверку теоремы удобно рассмотреть с помощью метода координат.

Возьмем начало координат в вершине A и примем прямую AC за ось абсцисс. Тогда A (0;0), C (168;0), B (120;90). Нетрудно будет вычислить центр тяжести M, центр описанной окружности O, центр вписанной окружности I, ортоцентр H, центр окружности девяти точек O_9, точку Фейербаха Ф.

Таб. 1.

A	B	C	M	O	I	H	O_9
(0;0)	(120;90)	(168;0)	(96;30)	(84;13)	(108;36)	(120;64)	(102;38,5)

Ф	R	r	AB	AC	BC
(141,2;22,2)	85	36	150	168	102

Площадь треугольника ABC равна 1890. Ясно, что такой треугольник удобнее всего чертить на миллиметровой бумаге. Такой треугольник дает хорошую возможность проверки результата Л. Эйлера, что ортоцентр, центр описанной окружности и медиана треугольника лежат на одной прямой – прямой Эйлера. И более того, проверим, что HM = 2OM.

Проведем векторную проверку теоремы Эйлера:

$\vec{HM} = \begin{pmatrix} 96 - 120 \\ 30 - 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -34 \end{pmatrix}$ $\vec{MO} = \begin{pmatrix} 84 - 96 \\ 13 - 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -17 \end{pmatrix}$ отсюда имеем,

$24^2 + 34^2 = 4\,(12^2 + 17^2)$; 1732 = 1732, HM = 2MO.

Здесь неожиданным является еще тот факт, что треугольники

ABH_2 – египетский (3;4;5), BCH_2 – индийский (8;15;17)

$АДH_2$, AHH_2 – индийский (8;15;17) , $СДH_2$, CHH_2 - египетский (3;4;5), и более того, если рассмотреть треугольники AHC, AHB, BHC, ABC, то радиусы описанных окружностей у них равны, в данном случае R = 170.

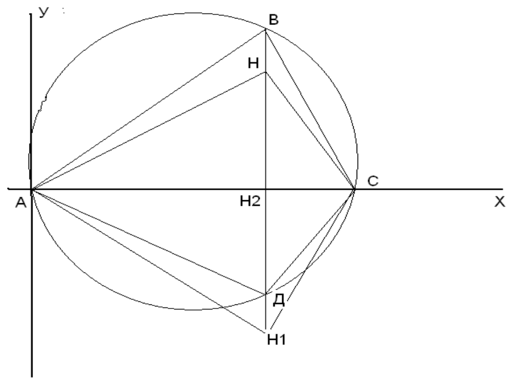

Рис. 1

Верно следующее суждение: всякий треугольник – ортоцентрический (т.е. во всяком треугольнике три высоты пересекаются в одной точке).

Однако не всякий тетраэдр – ортоцентричен. Четыре высоты лишь некоторых тетраэдров пересекаются в одной точке. Теорема интересна и продуктивна тем, что можно успешно обобщить понятие «прямая Эйлера» с треугольника на ортоцентрический тетраэдр.

Плоскость ***Пространство***

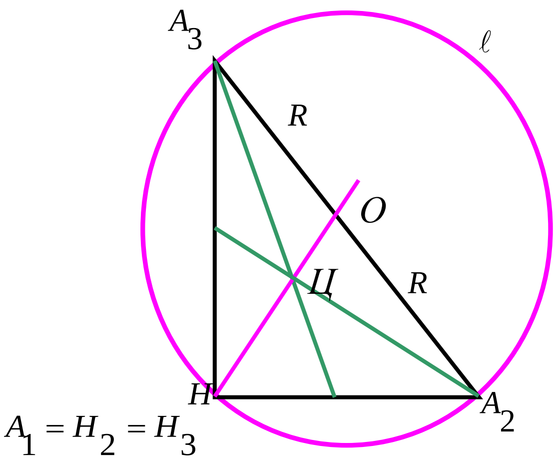

Рис. 2.

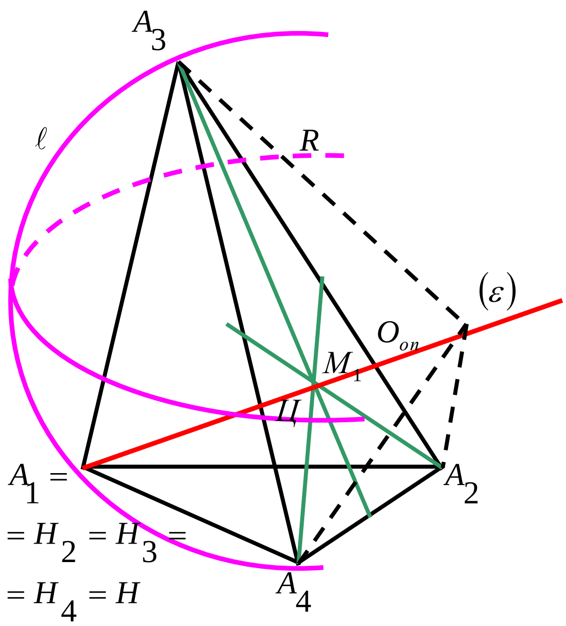

Рис. 3.

В качестве объекта испытания истинности теоремы удобно осуществлять проверку на эталонных фигурах, на которых быстрее можно получить числовые данные (или зрительно убедиться в истинности теоремы). Такой «эталонной фигурой» в пространстве служит равнобедренный прямоугольный тетраэдр. Построим в координатном пространстве равнобедренный прямоугольный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$, с координатами $A_1(0;0;0)$, $A_2(0;12;0)$, $A_3(0;0;12)$, $A_4(12;0;0)$. В равнобедренном прямоугольном тетраэдре боковые ребра – суть высоты, опущенные из трех вершин к противоположным граням; все четыре высоты равнобедренного прямоугольного тетраэдра пересекаются в одной точке (в начале координат). Н –ортоцентр тетраэдра, его координаты в данном случае Н(0;0;0). Найдем координаты Ц – центроида тетраэдра, как среднее арифметическое соответствующих координат вершин тетраэдра.

$Ц_X = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4 = (0 + 12 + 0 + 0)/4 = 3$, аналогично найдем следующие координаты и имеем $Ц_x = Ц_y = Цz = 3$ и Ц (3;3;3). Найдем положение центра О сферы, описанной около равнобедренного прямоугольного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Так как точка О равноудалена от всех вершин, то точка О лежит на прямой $O_1Ц$, где O_1 центр описанной окружности $A_2A_3A_4$. Точка О лежит на симметрали бокового ребра A_1A_2, О(6;6;6). Теперь докажем, что Ц,О,Н лежат на одной прямой. Это очевидно из вычислений координат $x = y = z$. Мы успешно обобщили понятие «прямая Эйлера» с треугольника на ортоцентрический тетраэдр.

Аналогом треугольника на плоскости является тетраэдр. Прямые аналогии приводят к двум классам тетраэдров: ортоцентрических тетраэдров (все высоты пересекаются в одной точке) и равногранных (все грани – равные треугольники), представитель которых может служить пространственным аналогом правильного треугольника. Основные цели задания состоят в получении различных (но эквивалентных) критериев для этих двух классов тетраэдров.

Литература

1. Александров, А.Д. Начала стереометрии -9. - М., - стр.5.
2. Волошинов, А.В. Математика и искусство. - М.: Просвещение, 2000. - Стр. 32-33.
3. Коменский, Я.А. Избранные педагогические сочинения. – М. 1955.
4. Саттерли Д. Описанная и вписанная окружности. - «School Science And mathematics». 1956. №7. с. 517-528.
5. Эрдниев П.М. Укрупнение дидактических единиц как технология обучения. В 2 Ч. М., 1992 г. 255 с.
6. Эрдниев, П.М. Преподавание математики в школе. (Из опыта обучения методом укрупненных упражнений). - М., 1978. - 304 с.