УДК 519.6(075.8)

Айтмухан Д.А.
студент магистратуры
специальность «Информационные системы»
НАО «Костанайский региональный университет им.А.Байтурсынова»
научный руководитель: Байманкулов А.Т., д.ф.-м.н., профессор
Казахстан, г. Костанай

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Аннотация:в статье рассматривается математическая модель распространении влаги в ненасыщенной зоне. Для обоснования математических свойств разрабатываемого метода численного решения задачи выводятся априорные оценки для решения дифференциальной задачи.

Ключевые слова: перенос влаги, итерационный процесс, сходимость, неравенство Коши, априорные оценки.

Aitmukhan D.A.
master's degree student
specialty " Information systems»
Kostanay Regional University named after A.Baitursynov
Scientific adviser: Baymankulov A. T.,
doctor of physical and mathematical sciences, professor
Kazakhstan, Kostanay

INTERFACED TASK.

Abstract: the article considers a mathematical model of the propagation of moisture in an unsaturated zone. To justify the mathematical properties of the developed method of numerical solution of the problem, a priori estimates for solving the differential problem are derived.

Key words: moisture transfer, iterative process, convergence, Cauchy inequality, a priori estimates.

1. Постановка задачи

В области $Q=(0,H)\times(0,T)$ изучается распространение влаги в ненасыщенной зоне. Математическая модель одномерной задачи описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial W}{\partial z}\right)+\frac{\partial K}{\partial z}. \tag{1}$$

Начальные и граничные условия задаются в виде соотношений

$$W(z,0)=W_0(z), \tag{2}$$

$$D(H)\frac{\partial W(H,t)}{\partial z}+K(H)=f(t), \tag{3}$$

$$W(0,t)=W_2=const. \tag{4}$$

Для неустановившихся процессов движения воды используется численное решение задачи (1)-(4) методом конечных разностей .

Поскольку процесс нахождения решения является итерационным, то вопрос доказательства сходимости его становится обязательным. Для того чтобы доказать сходимость итерационного процесса нам потребуются априорные оценки решения задачи.

Умножим (1) на $W(z,t)$ и проинтегрируем по z от 0 до H, по t от 0 до произвольного t. Тогда, учитывая граничные условия (3) и (4), получим

$$\int_0^H dz\int_0^t W\frac{\partial W}{\partial \tau}d\tau=\int_0^t d\tau\int_0^H\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(D(z)\frac{\partial W}{\partial z}\right)+\frac{\partial K(z)}{\partial z}\right)Wdz$$

$$\frac{1}{2}\int_0^H dz\int_0^t\frac{\partial W^2}{\partial \tau}d\tau=\int_0^t\left(D(z)\frac{\partial W}{\partial z}+K(z)\right)W\Big|_{z=0}^{z=H}d\tau-\int_0^H\int_0^t\left(D(z)\frac{\partial W}{\partial z}+K(z)\right)\frac{\partial W}{\partial z}dzd\tau$$

$$\frac{1}{2}\|W\|^2-\frac{1}{2}\|W_0\|^2+\int_0^t\left\|\sqrt{D(z)}\frac{\partial W}{\partial z}\right\|^2d\tau=\int_0^t K(z)W\Big|_{z=0}^{z=H}\tau+$$
$$+\int_0^t D\ (z)\frac{\partial W}{\partial z}W\Big|_{z=0}^{z=H}d\tau-\int_0^t\int_0^H K(z)\frac{\partial W}{\partial z}dzd\tau$$

$$\frac{1}{2}\|W\|^2+\int_0^t\left\|\sqrt{D(z)}\frac{\partial W}{\partial z}\right\|^2d\tau=\int_0^t f(\tau)W(H,\tau)d\tau-\int_0^t\int_0^H K(z)\frac{\partial W}{\partial z}dzd\tau+\frac{1}{2}\|W_0\|^2$$

Далее, применяя неравенство Коши, получим

$$\frac{1}{2}\|W\|^2+\int_0^t\left\|\sqrt{D(z)}\,\frac{\partial W}{\partial z}\right\|^2 d\tau \le \int_0^t \frac{f^2(\tau)}{\sqrt{D_{\min}}}d\tau+\int_0^t\sqrt{D_{\min}}\cdot W^2(H,\tau)d\tau+\frac{1}{2}\|W_0\|^2+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^H\frac{K^2(z)}{D(z)}dzd\tau+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^H D(z)\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 dzd\tau. \qquad (5)$$

Из тождества

$$W^2(H,t)=\int_0^H\frac{\partial W^2(z,t)}{\partial z}dz=2\int_0^H W(z,t)\frac{\partial W(z,t)}{\partial z}dz$$

следует оценка

$$W^2(H,t)\le\frac{1}{\varepsilon\sqrt{D_{\min}}}\int_0^H W^2(z,t)dz+\frac{\varepsilon}{\sqrt{D_{\min}}}\int_0^H D(z)\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 dz\,.$$

Подставляя в (5) получим, что

$$\frac{1}{2}\|W^2\|+\frac{1}{2}\int_0^t\left\|\sqrt{D(z)}\,\frac{\partial W}{\partial z}\right\|^2 d\tau\le\int_0^t\frac{f^2(\tau)}{\sqrt{D_{\min}}}d\tau+\frac{1}{2}\|W_0\|^2+\int_0^H\frac{K^2(z)}{D(z)}Tdz+$$

$$+\varepsilon\int_0^t\sqrt{D(z)}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\|W\|^2 d\tau\,.$$

Пусть $\varepsilon=\frac{1}{4}$, тогда

$$\frac{1}{2}\|W^2\|+\frac{1}{4}\int_0^t\left\|\sqrt{D(z)}\,\frac{\partial W}{\partial z}\right\|^2 d\tau\le C_1\left(1+\frac{2}{\sqrt{D_{\min}}}+\frac{1}{D_{\min}}\right)+4\int_0^t\|W\|^2 d\tau\,,$$

где

$$C_1=\max\left(\int_0^t f^2(\tau)d\tau,\ \int_0^H K^2(z)dz,\ \frac{1}{2}\int_0^H W_0^2(z)dz\right).$$

Применяя лемму Гронуолла, получим

$$\max_t\|W\|^2+\int_0^t\left\|\sqrt{D}\,\frac{\partial W}{\partial z}\right\|^2 dt\le C_2\left(1+\frac{1}{\sqrt{D_{\min}}}\right)^2. \qquad (6)$$

Полученный результат оформим в виде леммы 1.

Лемма 1. Если $f(t) \in L_2(0,T),\ W_0(z),\ K(z) \in L_2(0,H),$ то для решения прямой задачи имеют место оценки

$$\max\|W\|^2 + \int_0^t \left\| \sqrt{D}\,\frac{\partial W}{\partial z} \right\| d\tau \le C_2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{D_{\min}}} \right)^2,$$

$$\int_0^t W^2(H,\tau)\,d\tau \le C_3 \left(1 + \frac{1}{D_{\min}} \right) \frac{1}{\sqrt{D_{\min}}}.$$

Литература

1. Нерпин С.В., Юзефович Г.И. О расчете нестационарного движения влаги в почве. // Докл. ВАСХНИЛ, №6, 1966.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1996, 724 с.

3. Рысбайулы Б. Идентификация коэффициента теплопроводности распространения тепла в неоднородной среде // Вестник КБТУ, 2008, №1, ст. 62-65

4. Байманкулов А.Т. Определение коэффициента диффузии почвенной воды в однородной среде.// Известия НАН РК, 2008, № 3, с.45-47.